

Exercice 1 (★). Déterminer l'ensemble des solutions $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de l'équation $x + 2y = 3$. On l'écrira de deux façons, en utilisant deux paramétrages différents.

Exercice 2 (★). Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre à l'aide des opérations élémentaires les systèmes d'inconnues (x, y, z) :

$$1. \begin{cases} 2x + 3y - 2z = -5 \\ x + 2y + z = 3 \\ x - 5y - 3z = -2 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ x - 5y + 8z = -2 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x + 2y - 3z = 13 \\ 2x - 5y - 3z = -7 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

Exercice 3 (★).

- Déterminer l'ensemble des $t \in \mathbb{R}^*$ tels que $\frac{1}{t} \leq -2$.
- Déterminer l'ensemble des $t \in \mathbb{R}^*$ tels que $\frac{1}{t} \leq 2t$.

Exercice 4 (★★). Montrer que :

- Pour tout $x \leq 0$, $\frac{e^x - x^2}{1 + x^2} \leq 1$.
- Pour tout $x \geq 2$, $\frac{x^2 - 2}{x - 1} \geq 2$.

Exercice 5 (★). Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $b \neq 0$. Encadrer au mieux $\frac{a}{b}$ (lorsque c'est possible, sinon on justifiera l'impossibilité), sachant que :

$$1. \begin{cases} 1 \leq a \leq 2 \\ 3 \leq b \leq 5 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} 1 < a \leq 2 \\ 3 < b \leq 5 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} -1 \leq a \leq 2 \\ 3 \leq b \leq 5 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} 1 \leq a \leq 2 \\ -3 \leq b \leq 5 \end{cases} \quad 5. \begin{cases} 1 \leq a \leq 2 \\ 0 < b \leq 5 \end{cases}$$

Exercice 6 (★★). Soit $a > 0$. Sans étudier les variations des fonctions suivantes, déterminer pour chacune un majorant et un minorant :

$$1. f_1 : \begin{array}{ll} [1, 10] & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \frac{\ln(t)}{t} \end{array} \quad 2. f_2 : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \frac{\sin(t)}{1 + t^2} \end{array}$$

$$3. f_3 : \begin{array}{ll} [0, 3] & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \frac{1 - at}{2e^t - 1} \end{array} \quad 4. f_4 : \begin{array}{ll} [-1, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \ln(t^2 + 1) + \frac{3t}{a + t^2} \end{array}$$

$$5. f_5 : \begin{array}{ll} [-1, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \frac{at^2}{1 + e^t} - \frac{t^2}{a^2} \end{array}$$

Exercice 7 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $S = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n |i - j|$.

Exercice 8 (★). Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $7 - 4x \leq |x + 5|$.

Exercice 9 (★★★). Trouver toutes les solutions réelles de l'inéquation $\sqrt{2x + 22} \geq 1 - x$.

Exercice 10 (★★). Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\lfloor (2x + 1)^2 \rfloor = 3$.

Exercice 11 (★). Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \lfloor kx \rfloor$.