Petits systèmes et inégalités

Exercice 1 (★). Déterminer l'ensemble des solutions $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de l'équation $x + 2y = 3$. On l'écrira de deux façons, en utilisant deux paramétrages différents.

Résultat attendu : L'ensemble des solutions vaut $\left\{ \left(\lambda, \frac{3-\lambda}{2}\right) \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \{(3-2\lambda, \lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 2 (★). Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre à l'aide des opérations élémentaires les systèmes d'inconnues (x, y, z) :

1. $\begin{cases} 2x+3y-2z &= -5 \\ x+2y+z &= 3 \\ x-5y-3z &= -2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x+2y-3z &= 1 \\ 3x-y+2z &= 0 \\ x-5y+8z &= -2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x+2y-3z &= 13 \\ 2x-5y-3z &= -7 \\ -x+2y+z &= 3 \end{cases}$

Résultat attendu :

1. L'unique solution est $x = 2$, $y = -1$, $z = 3$.
2. Selon le choix du paramétrage, l'ensemble des (x, y, z) solutions peut s'écrire $\left\{ \left(\frac{1-\lambda}{7}, \frac{3+11\lambda}{7}, \lambda \right) | \lambda \in \mathbb{R} \right\}$, $\left\{ \left(\frac{2-\lambda}{11}, \lambda, \frac{7\lambda-3}{11} \right) | \lambda \in \mathbb{R} \right\}$, ou $\{(\lambda, 2-11\lambda, 1-7\lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$.
3. L'unique solution est $x = 1$, $y = 3$, $z = -2$.

Exercice 3 (★).

1. Déterminer l'ensemble des $t \in \mathbb{R}^*$ tels que $\frac{1}{t} \leqslant -2$.
2. Déterminer l'ensemble des $t \in \mathbb{R}^*$ tels que $\frac{1}{t} \leqslant 2t$.

Résultat attendu :

1. L'ensemble des solutions est $\left[-\frac{1}{2}, 0 \right[$.
2. L'ensemble des solutions est $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right[\cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty \right[$.

Exercice 4 (★★). Montrer que :

1. Pour tout $x \leqslant 0$, $\frac{e^x - x^2}{1+x^2} \leqslant 1$.
2. Pour tout $x \geqslant 2$, $\frac{x^2-2}{x-1} \geqslant 2$.

Résultat attendu :

1. On procède par majoration directe.
2. On raisonne par équivalences pour se ramener à une inégalité plus simple à étudier.

Exercice 5 (★). Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $b \neq 0$. Encadrer au mieux $\frac{a}{b}$ (lorsque c'est possible, sinon on justifiera l'impossibilité), sachant que :

1. $\begin{cases} 1 \leqslant a \leqslant 2 \\ 3 \leqslant b \leqslant 5 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 1 < a \leqslant 2 \\ 3 < b \leqslant 5 \end{cases}$
3. $\begin{cases} -1 \leqslant a \leqslant 2 \\ 3 \leqslant b \leqslant 5 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 1 \leqslant a \leqslant 2 \\ -3 \leqslant b \leqslant 5 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 1 \leqslant a \leqslant 2 \\ 0 < b \leqslant 5 \end{cases}$

Résultat attendu :

1. $\frac{1}{5} \leqslant \frac{a}{b} \leqslant \frac{2}{3}$
2. $\frac{1}{5} < \frac{a}{b} < \frac{2}{3}$
3. $-\frac{1}{3} \leqslant \frac{a}{b} \leqslant \frac{2}{3}$
4. Pas de bornes
5. $\frac{1}{5} \leqslant \frac{a}{b}$

Exercice 6 (★★). Soit $a > 0$. Sans étudier les variations des fonctions suivantes, déterminer pour chacune un majorant et un minorant :

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} [1, 10] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{\ln(t)}{t} \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{\sin(t)}{1+t^2} \end{array}$
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} [0, 3] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1-at}{2e^t-1} \end{array}$
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} [-1, 1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \ln(t^2+1) + \frac{3t}{a+t^2} \end{array}$
5. $f_5 : \begin{array}{ccc} [-1, 1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{at^2}{1+e^t} - \frac{t^2}{a^2} \end{array}$

Résultat attendu :

1. Un minorant est 0, un majorant est $\ln(10)$.
2. Un minorant est -1, un majorant est 1.
3. Un minorant est $\dfrac{1}{2e^3-1} - 3a$, un majorant est 1.
4. Un minorant est $\dfrac{-3}{a}$, un majorant est $\dfrac{3}{a} + \ln(2)$.
5. Un minorant est $-\dfrac{1}{a^2}$, un majorant est $\dfrac{a}{1+e^{-1}}$.

Exercice 7 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $S = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} |i-j|$.

Résultat attendu : $S = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Exercice 8 (★). Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $7 - 4x \leqslant |x+5|$.

Résultat attendu : L'ensemble des solutions est $\left[\dfrac{2}{5}, +\infty\right[$.

Exercice 9 (★★★). Trouver toutes les solutions réelles de l'inéquation $\sqrt{2x+22} \geqslant 1 - x$.

Résultat attendu : L'ensemble des solutions est $[-3, +\infty[$.

Exercice 10 (★★). Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\lfloor (2x+1)^2 \rfloor = 3$.

Résultat attendu : L'ensemble des solutions est $\left]-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$.

Exercice 11 (★). Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$.

Résultat attendu : On montre par théorème d'encadrement que la limite vaut $\dfrac{x}{2}$.