Polynômes

Exercice 1 (★). Calculer $(X+1)^5-(X-1)^5$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X)=(X-2)^n-(X+3)^n+5n(X+1)^{n-1}$. Déterminer son degré et son coefficient dominant.

Exercice 3 (★). Effectuer les divisions euclidiennes dans $\mathbb{R}[X]$ de

1. $3X^5+4X^2+1$ par X^2+2X+3
2. $3X^5+2X^4-X^2+1$ par X^3+X+2
3. $2X^3-X^2-X+2$ par X^2-1
4. $3X^5+2X^4-X^2+1$ par X^2+X+2

Exercice 4 (★). Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On note R_α le reste de la division euclidienne de P par $X-\alpha$. Montrer que $R_\alpha(X)=P(\alpha)$.

Exercice 5 (★★). Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

1. Soit S le reste de la division euclidienne de P par X^2+1. Montrer que $S=0$ si et seulement si $P(i)=0$.
2. Déterminer les entiers positifs n tel que X^2+1 divise X^n+1.

Exercice 6 (★★). Déterminer le reste de la division euclidienne de :

1. X^n-X-1 par $(X-1)(X+2)$
2. X^n-X-1 par $(X-1)^2$

Exercice 7 (★). Soit $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ deux polynômes qui coïncident sur les entiers (c'est-à-dire tels que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $P(n)=Q(n)$). Montrer que $P=Q$.

Exercice 8 (★). Soit $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(\arctan(x))=Q(\arctan(x))$. Montrer que $P=Q$.

Exercice 9 (★★). Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 2$. Montrer que la fonction polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ associée à P admet au plus n points fixes.

Exercice 10 (★★). Démontrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z)=\bar{z}$.

Exercice 11 (★). Soit $P(X)=X^4+X^3-4X^2+X+1 \in \mathbb{R}[X]$.

1. Vérifier que 1 est racine double de P.
2. Écrire la formule de Taylor pour P en 1.
3. En déduire le quotient de P par $(X-1)^2$.
4. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 12 (★). Déterminer les racines de $P(X)=4X^3-20X^2+27X-9$, puis sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$. *Indication : commencer par tester si* 3 *est racine.*

Exercice 13 (★). Déterminer les racines réelles de $Q(X)=X^3-3X^2+6X-4$. En déduire la forme factorisée de ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 14 (★). Soit $P(X)=4X^3+4X^2+3X+3$. Déterminer sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 15 (★). Soit $P(X)=X^5-1$. Déterminer sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 16 (★★). Soit $P(X)=X^6+1$. Déterminer sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 17 (★★★). Soit $P(X)=X^9+X^6+X^3+1$. Déterminer sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 18 (★★★). Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X)=X^{2n}-2\cos(n\theta)X^n+1$. Déterminer sa décomposition en produits de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 19 (★).

1. Déterminer une primitive (intervalles à préciser) de : $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$.
2. En déduire une primitive (intervalles à préciser) pour chacune des fonctions suivantes :

   (a) $x \mapsto \dfrac{x^3-x^2-4x+3}{x+1}$ (b) $x \mapsto \dfrac{x^3-x^2-4x+3}{x^2+1}$ (c) $x \mapsto \dfrac{x^3-x^2-4x+3}{x^2-1}$

Exercice 20 (★★). Résoudre les équations d'inconnue $P \in \mathbb{C}[X]$ suivantes :

1. $(P'(X))^2=4P(X)$
2. $(X^2+1)P''(X)-6P(X)=0$

Exercice 21 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}$. On se propose d'étudier les polynômes $T_n \in \mathbb{R}[X]$ qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(nx) = T_n(\cos(x)).$$

1. On fixe $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si un tel polynôme T_n existe, alors il est unique.
2. Déterminer $T_0(X)$, $T_1(X)$ et $T_2(X)$.
3. Soit $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$. Factoriser $\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x)$. En déduire que si $T_{n-1}(X)$ et $T_n(X)$ sont bien définis, on peut définir $T_{n+1}(X)$ par $T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X)$. En déduire l'existence de $T_n(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Déterminer le degré de $T_n(X)$ et son coefficient dominant.
5. Soit $n \geqslant 1$. Déterminer les $x \in [0, \pi]$ tels que $\cos(nx) = 0$. En déduire l'ensemble des racines de $T_n(X)$ puis sa décomposition en produit de polynômes irréductibles.
6. En évaluant le polynôme $T_n(X)$ en un point x_0 bien choisi, en déduire :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$