Exercices: Polynômes

Exercice 1. Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes $\mathbb{C}[X]$, on donne :

1. F l'ensemble des polynômes de degré 3. F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$?
2. G l'ensemble des polynômes de coefficient dominant 1. G est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$?
3. H l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}_2[X]$ tels que $P(i) = 0$. H est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$?

Exercice 2. Soit n un entier naturel non nul.

1. Dans l'espace vectoriel $C(\mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on donne $f_0 : x \longrightarrow 1$ et pour tout entier naturel non nul k, $f_k : x \longrightarrow (\cos x)^k$. La famille $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est-elle une famille libre de $C(\mathbb{R})$?
2. Dans $\mathbb{C}_3[X]$, on donne $P_0(X) = 1 - iX$, $P_1(X) = 1 + X^2$ et $P_2(X) = iX - X^3$. La famille (P_0, P_1, P_2) est-elle une famille libre dans $\mathbb{C}_3[X]$? génératrice de $\mathbb{C}_3[X]$?

Exercice 3. Montrer que les polynômes 1, X, $X(X-1)$, $X(X-1)(X-2)$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus 3. En particulier, exprimer X^2 et X^3 dans cette base.

Exercice 4. Calculer $(X+1)^5 - (X-1)^5$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme :

$$P(X) = (X-2)^n - (X+3)^n + 5n(X+1)^{n-1}.$$

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme $P(X) = (X^2 + X + 1)^n - X^{2n} - aX^{2n-1}$ en fonction des valeurs de a.

Exercice 7. Calculer $P(X) = (X^3 - X^2 + 1)(X^2 + X + 1)$ dans $\mathbb{R}[X]$ et en déduire une preuve que 100011 n'est pas un nombre premier.

Exercice 8. Effectuer les divisions euclidiennes dans $\mathbb{R}[X]$ de

1. $3X^5 + 4X^2 + 1$ par $X^2 + 2X + 3$.
2. $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^3 + X + 2$.
3. $2X^3 - X^2 - X + 2$ par $X^2 - 1$.
4. $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^2 + X + 2$.

Exercice 9. Soit $P(X) = X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$. Peut-on trouver un polynôme $Q(X)$ tel que :

1. $P(X) = Q(X)(X-2)$?
2. $P(X) = Q(X)(X-2)^2$?

Exercice 10. Soit $P(X) = X^4 + X^3 - 4X^2 + X + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

1. Vérifier que 1 est racine double de P.
2. Écrire la formule de Taylor pour P en 1.
3. Calculer le quotient de P par $(X-1)^2$.
4. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 11. Déterminer les racines complexes des polynômes à coefficients réels suivants, et en déduire les meilleures factorisations possibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

1. $2X^2 - X + 1$.
2. $X^4 - 13X^2 + 36$.

Exercice 12. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note R_α le reste de la division euclidienne de P par $X - \alpha$. Montrer que $R_\alpha(X) = P(\alpha)$.
2. Soit S le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 1$. Montrer que $S = 0$ si et seulement si $P(i) = 0$.
3. Déterminer les entiers positifs n tel que $X^2 + 1$ divise $X^n + 1$.

Exercice 13. Déterminer le reste de la division euclidienne de :

1. $X^n - X - 1$ par $(X-1)(X+2)$.
2. $X^n - X - 1$ par $(X-1)^2$.

Exercice 14 (Polynômes d'interpolation de Lagrange)**.** Soient $a_1, \ldots, a_{n+1}$ des réels deux à deux distincts. Pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, on pose :

$$L_i(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}.$$

Le but de l'exercice est d'étudier les propriétés de ces polynômes.

I. Introduction des polynômes interpolateurs, premières propriétés

1. Pour cette question uniquement, on pose $n = 1$, $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$. Calculer $L_1(X)$ et $L_2(X)$.
2. Soit $i \in [\![1, n+1]\!]$. Calculer $L_i(a_i)$.
3. Soit $(i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, avec $i \neq j$. Calculer $L_i(a_j)$.
4. Soient $b_1, \ldots, b_{n+1}$ des réels fixés. On pose : $P(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} b_i L_i(X)$. Ce polynôme s'appelle polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n+1$ couples de scalaires (a_i, b_i).
   (a) Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux 2 couples $(1, 1)$ et $(2, 1)$.
   (b) On se place de nouveau dans le cadre général de $n+1$ couples de scalaires (a_i, b_i). Montrer que le polynôme d'interpolation de Lagrange associé P est de degré inférieur à n et vérifie :
   $$\forall j \in [\![1, n+1]\!], \quad P(a_j) = b_j.$$
   (c) Montrer que P est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à n qui vérifie :
   $$\forall j \in [\![1, n+1]\!], \quad P(a_j) = b_j.$$

II. Lien avec les espaces vectoriels

1. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et de degré au plus n. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Soient $a_1, \ldots, a_{n+1}$ des réels deux à deux distincts fixés. On considère les polynômes $L_i(X)$ associés, définis comme précédemment.
   (a) Montrer que la famille $(L_i(X))_{i \in [\![1, n+1]\!]}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Soit T un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. En utilisant la question I.4c, donner une écriture de $T(X)$ comme combinaison linéaire des $(L_i(X))_{i \in [\![1, n+1]\!]}$.
   (c) Que peut-on en déduire concernant la famille $(L_i(X))_{i \in [\![1, n+1]\!]}$?