Produits scalaires

Exercice 1 (★). Pour tous $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ dans $\mathbb{R}^3$, on pose $\varphi(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$.

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer la norme de $(1, 2, 3)$ pour ce produit scalaire.

Résultat attendu :

1. On revient à la définition.
2. $\|(1, 2, 3)\| = 6$.

Exercice 2 (★). Soit u et v deux fonctions continues et positives sur $[0, 1]$ telles que $\forall x \in [0, 1]$, $u(x)v(x) \geqslant 1$.
Montrer que $\left(\int_0^1 u(t)dt\right)\left(\int_0^1 v(t)dt\right) \geqslant 1$.
Résultat attendu : On se place sur $C([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel et on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux fonctions bien choisies.

Exercice 3 (★). Soient $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = 1$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geqslant n^2$ et déterminer les éventuels cas d'égalité.
Résultat attendu : On se place sur $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel et on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux vecteurs bien choisis. Le cas d'égalité correspond aux vecteurs de $\mathrm{Vect}((1, \ldots, 1))$.

Exercice 4 (★). Soit f une fonction réelle, continue, et strictement positive sur un segment $[a, b]$.
On pose $\ell(f) = \left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f}\right)$. Montrer que $\ell(f) \geqslant (b - a)^2$ et déterminer les éventuels cas d'égalité.
Résultat attendu : On se place sur $C([a, b], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel et on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux fonctions bien choisies. Le cas d'égalité correspond au cas des fonctions constantes.

Exercice 5 (★★). Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 t^n f(t)dt$.
Montrer que pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $I_{n+p}^2 \leqslant I_{2n}I_{2p}$.
Résultat attendu : On se place sur $C([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel et on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux fonctions bien choisies.

Exercice 6 (★). On considère $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, et les vecteurs $e_1 = (2, 1)$ et $e_2 = (2, 2)$.
Justifier que (e_1, e_2) est une base de E, et l'orthonormaliser.
Résultat attendu : On montre que (e_1, e_2) est une famille libre de E, à $2 = \dim(E)$ éléments. L'orthonormalisation de Gram-Schmidt donne alors la base orthonormale $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1), \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2)\right)$.

Exercice 7 (★). Pour tous polynômes $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} P(k)Q(k)$

1. Montrer que $\langle , \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Orthonormaliser la famille $(1, X, X^2)$.

Résultat attendu :

1. On revient à la définition.
2. L'algorithme de Gram-Schimdt donne la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}(X - 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(3X^2 - 6X + 1)\right)$.

Exercice 8 (★★). Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille de vecteurs unitaires tels que :

$$\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k\rangle^2 .$$

Montrer que $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormée de E.
Résultat attendu : On utilise la relation proposée pour montrer que la famille est orthogonale. Comme c'est de plus une famille unitaire, qui a $\dim(E)$ éléments, c'est une base orthonormée.

Exercice 9 (★). Dans les cas suivants, déterminer une base de $F^\perp$, sa dimension, et la dimension de F.

1. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathrm{Vect}\left((3, -1)\right)$.
2. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathrm{Vect}\left((1, 0, 1), (-1, -1, 1)\right)$.
3. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0\right\}$.
4. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \text{ et } 2x_1 - x_2 = 0\right\}$.

Résultat attendu :

1. Une base de $F^\perp$ est $((1,3))$ et on a $\dim(F^\perp)=1$, $\dim(F)=1$.
2. Une base de $F^\perp$ est $((1,-2,-1))$ et on a $\dim(F^\perp)=1$, $\dim(F)=2$.
3. Une base de $F^\perp$ est $(3,4,-1)$ et on a $\dim(F^\perp)=1$, $\dim(F)=2$.
4. Une base de $F^\perp$ est $((3,4,-1),(2,-1,0))$ et on a $\dim(F^\perp)=2$, $\dim(F)=1$.

Exercice 10 (★★). Soit $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | 2x-z=0 \text{ et } y+z=0\right\}$. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la somme directe $F\oplus F^\perp$.
Résultat attendu : On juxtapose une base orthonormée de F et une base orthonormée de $F^\perp$, ce qui donne par exemple la base $\left(\frac{1}{3}(1,-2,2), \frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,-1), \frac{1}{3\sqrt{5}}(2,5,4)\right)$.

Exercice 11 (★★). Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
2. En déduire que $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
3. Montrer que $E=F\oplus G$ si et seulement si $E=F^\perp\oplus G^\perp$.

Résultat attendu :

1. On raisonne par double inclusion.
2. On applique le résultat de la question 1 à $F^\perp$ et $G^\perp$, puis on utilise les raccourcis de la dimension finie.
3. On utilise les questions précédentes pour montrer une implication, les raccourcis de la dimension finie donnent ensuite la réciproque.

Exercice 12 (★). Soit $E=\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel. Déterminer le projeté orthogonal du vecteur $u=(1,2,-1)$ sur le plan d'équation $x+y+z=0$.
Résultat attendu : Le projeté orthogonal vaut $\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3},-\frac{5}{3}\right)$.

Exercice 13 (★). Soit $E=\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel. Déterminer la distance de $v=(1,2,3)$ au sous-espace vectoriel $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x+2y-z=0\}$.
Résultat attendu : On trouve $d(v,F)=\frac{\sqrt{6}}{3}=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Exercice 14 (★★). Soit E un espace de dimension 3 et $\mathcal{B}=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base orthonormée de E.
Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$ du projecteur orthogonal sur la droite vectorielle dirigée par $\vec{i}-3\vec{k}$.

Résultat attendu : La matrice recherchée est $\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0\\ -3 & 0 & 9\end{pmatrix}$.

Exercice 15 (★★★). Montrer que l'ensemble $A=\left\{\int_0^\pi \left(e^x - a\cos(x)-b\sin(x)\right)^2 dx | (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$ admet un minimum que l'on calculera.
Résultat attendu : On se place sur $C([0,\pi],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel, pour remarquer que $A=\{\|\exp - f\|^2 | f\in \mathrm{Vect}(\cos,\sin)\}$. Un premier calcul donne que le projeté de exp sur $\mathrm{Vect}(\cos,\sin)$ vaut $\frac{-e^\pi-1}{\pi}\cos+\frac{e^\pi+1}{\pi}\sin$. On en déduit après un second calcul que $\min(A)=\frac{e^{2\pi}-1}{2}-\frac{(e^\pi+1)^2}{\pi}$.