ECS1 **Exercices : Récurrence, sommes et produits**

Exercice 1. Soit la fonction $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x-1)e^{-x} \end{array}$. On définit la fonction $g^{(n)}$ comme la dérivée n-ième de g (obtenue en dérivant g n fois). Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g^{(n)}(x) = (-1)^n (x-n-1)e^{-x}.$$

Exercice 2. Soit f une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) \geqslant n$.

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 7$ et $u_{n+2} = 7u_{n+1} - 10u_n$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 2^n + 5^n.$$

Exercice 4 (Polynôme de Tchebychev)**.** On considère la suite de fonctions polynomiales définie par $T_0(X) = 1$, $T_1(X) = X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X).$$

1. Calculer $T_2(X)$ et $T_3(X)$.
2. Montrer que T_n est un polynôme dont on déterminera le degré et le coefficient dominant.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies ? Pourquoi ?

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\alpha + a_k) = \alpha + \sum_{i=1}^{n} a_i$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{j=1}^{n} b_j$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha a_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^\alpha = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^\alpha$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} x^k$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1}$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{6}{2^k}$

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes (on donnera le résultat sous forme factorisée) :

1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(1-k)$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (n-k)k^2$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+2}{k}\right)$

Exercice 8. Déterminer deux réels A et B tels que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)}$.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k \times k!)$.

Indication : $k = k + 1 - 1$.

Exercice 10. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les sommes à double indice suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)$
2. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (i+j)$
3. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant n} \frac{i}{k+1}$
4. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j)$

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $\alpha \in \mathbb{R}$. Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies ? Pourquoi ?

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (\alpha a_k) = \alpha \prod_{k=1}^{n} a_k$
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (a_k b_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)$
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \prod_{k=1}^{n} a_k + \prod_{k=1}^{n} b_k$

Exercice 12. Soit n un entier naturel. Calculer le produit $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij$.

Exercice 13. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = (n+1)(u_{n+1} + u_n)$. Montrer que pour tout n entier naturel,

$$u_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Exercice 14. Démontrer par récurrence que pour tout entier n non nul :

$$\prod_{k=1}^{n} (2k)! \geqslant ((n+1)!)^n.$$