Exercices: Ensemble des réels, suites usuelles

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $7-4x \leqslant |x+5|$.

Exercice 2. Trouver toutes les solutions réelles de l'inéquation $\sqrt{2x+22} \geqslant 1-x$.

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left\lfloor (2x+1)^2 \right\rfloor = 3$.

Exercice 4. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\lfloor x+y \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.

Exercice 5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$.

Exercice 6. On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante de réels positifs ou nuls. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Soit (α, β) un couple de nombres réels vérifiant $0 < \alpha < 1 < \beta$. Pour tout entier naturel $n \neq 0$ tel que $n \neq \lfloor \alpha n \rfloor$ et $n \neq \lfloor \beta n \rfloor$, justifier l'encadrement :

$$\frac{S_{\lfloor \beta n \rfloor} - S_n}{\lfloor \beta n \rfloor - n} \leqslant a_n \leqslant \frac{S_n - S_{\lfloor \alpha n \rfloor}}{n - \lfloor \alpha n \rfloor}.$$

Exercice 7. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par $u_n - 2u_{n+1} = 2n+3$ et $u_0 = 2$.

1. Déterminer un réel b tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par $v_n = u_n + bn - 1$ soit géométrique.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 8. Pour chacune des suites suivantes, exprimer le terme général de la suite en fonction de n :

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = 2u_n - 1$, $u_0 = 5$.
2. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_{n+1} = -v_n + 2$, $v_0 = 1$.

Exercice 9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier n non nul par

$$nu_n + u_{n-1} - \frac{2}{(n-1)!} = 0 \text{ et } u_0 = -1.$$

1. Étudier la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par $v_n = n!u_n$.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 10. Pour chacune des suites suivantes, exprimer le terme général de la suite en fonction de n :

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+2} = -u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n$, $u_0 = u_1 = 1$.
2. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_{n+2} = -v_{n+1} - v_n$, $v_0 = 1$ et $v_1 = -1$.
3. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_{n+2} = 3w_{n+1} - 2w_n$, $w_0 = 0$ et $w_1 = 1$.

Exercice 11. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par

$$u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}, \quad u_0 = 1, \quad u_1 = 2.$$

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par $v_n = \ln(u_n)$ existe.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire double.
3. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.