Exercices PCSI
É.Bouchet

Relations asymptotiques

Exercice 1 (★). Déterminer un équivalent simple lorsque $n \to +\infty$ de :

1. $n+2$
2. $\dfrac{1}{n}+2$
3. $3e^{2n}+2n^4$
4. $e^{\frac{1}{n}}\left(\cos(\frac{1}{n^2})-1\right)$
5. $\dfrac{1}{2n^2}-\dfrac{3}{n}+e^{-n}$
6. $(n+2)e^{n+3}$
7. $(n^2+n+1)\ln(n)$
8. $\dfrac{3}{5n^2+1}$
9. $(2n-\ln n)^3$
10. $\dfrac{\ln(n^2+1)}{\ln(n+1)}$
11. $\sqrt{4-\dfrac{4}{n}}-2$
12. $\left(\dfrac{n+e^n}{1+e^{2n}}\right)^2$
13. $\sqrt{\dfrac{2}{n^4}+\dfrac{2}{n^2}}$
14. $\dfrac{n\ln(n^2+n)+2n}{(n+1)^2\ln(n^5+1)}$
15. $\dfrac{(1+n)^2}{\cos(\frac{1}{n})}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$
16. $\ln(1+n)-\ln(n)$

Exercice 2 (★). Déterminer un équivalent simple lorsque $x \to +\infty$ puis lorsque $x \to 0$ (ou parfois 0^+) de :

1. $2+3x$
2. $2x^2-5x+7$
3. $x^4-2+\dfrac{4}{x}$
4. $\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}$
5. $\dfrac{x^3+1}{\ln(1+x^2)}$
6. $5\ln(x)+2$
7. $5\ln(x)+2x$
8. $5\ln(x)+\dfrac{2}{x}$
9. $\dfrac{1}{2x+3}$
10. $3e^x+x-1$
11. $\dfrac{x-3x^3}{2x^2+x^4}$
12. $\dfrac{3x^2}{x^2+x^3}$
13. $\dfrac{2e^x+x^2+3}{e^{2x}+x^3}$
14. $\dfrac{x^2\ln(2+x+e^x)}{x+x^2}$
15. $\dfrac{1}{3x-2}$
16. $\left(\ln(2x+4x^4)\right)^2$
17. $\ln(1+2x+3x^2)$

Exercice 3 (★★). Trouver un équivalent simple de $\ln\left(1-\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

Exercice 4 (★★). Soit u une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ qui vérifie $\ln\left(\dfrac{2}{u_n}\right) \sim \dfrac{1}{n^2}$. Montrer que u converge vers une limite ℓ et donner un équivalent de $(u_n - \ell)$.

Exercice 5 (★★). Soient u et v deux suites à valeurs strictement positives telles que $\begin{cases} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ \lim u_n = \lim v_n = +\infty \end{cases}$.

1. Montrer que $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.
2. Montrer qu'on n'a pas forcément $e^{u_n} \sim e^{v_n}$.
3. Application : déterminer un équivalent de $\dfrac{\ln(n^2+3n+2)}{\ln(n)}$ et de $\dfrac{n^2+1}{\ln(e^n+n)}$.

Exercice 6 (★). Simplifier au maximum les expressions suivantes, en restant le plus précis possible.

1. $n^2O(n^3)$
2. $\dfrac{1}{n^2}o(n)$
3. $o(n^2)\times o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$
4. $o(e^{-n})\times O(n)$
5. $O(\ln(n))\times O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$
6. $\left(\dfrac{3}{\ln(n)}\right)o(n^2)\times o(e^{-n})$
7. $2o(\sqrt{n})+o(\sqrt{n})$
8. $O\left(\dfrac{1}{n}\right)-O\left(\dfrac{1}{n}\right)$
9. $o(e^{-n})-2O(e^{-n})$
10. $\dfrac{1}{n}(o(\ln(n))-o(\ln(n)))$
11. $e^n+O(e^n)$
12. $o(n^2)+o(n^3)$
13. $o(e^{-n})+o(e^{-2n})$
14. $\dfrac{1}{n^3}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$
15. $n+o(n\ln(n))+o(\ln(n))$

Exercice 7 (★).

1. Simplifier au maximum les expressions suivantes (les O et o sont en $x\to+\infty$), en restant le plus précis possible.
   (a) $o(x+1)$
   (b) $o(5x^2)-o(2x^3)$
   (c) $O(x)-O(x^2)$
   (d) $\ln(x)\left(o(x)+o(x^2)\right)$
   (e) $O(2+x-3x^4)$
   (f) $o\left(\dfrac{1}{x}\right)+o(1)$
   (g) $o\left(x^2-2-\dfrac{1}{x^3}\right)$
   (h) $o\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)$
   (i) $o\left(\dfrac{1}{x+2}\right)$
2. Réaliser le même travail avec cette fois-ci les O et o en $x \to 0$ (0^+ lorsqu'on utilise un logarithme).

Exercice 8 (★). Vrai ou faux ? Justifier.

1. $n^2 \underset{n\to+\infty}{=} o(e^n)$
2. $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$
3. $n^5 \underset{n\to+\infty}{=} o(e^n)$
4. $\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$
5. $\frac{1}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$
6. $5n^4-3n^2-1 \underset{n\to+\infty}{=} O(n^4)$
7. $o(n^2) \underset{n\to+\infty}{=} o(n^3)$
8. $o(n^3) \underset{n\to+\infty}{=} o(n^2)$

Exercice 9 (★). Simplifier au maximum (et sans perdre de précision) les expressions suivantes (les O et o sont en $x \to 0$) :

1. $1 + 2x - x^2 + o(x)$
2. $5x^5 - 3x^2 + o(x^3)$
3. $-2 + x^2 - x^3 + o(x+1)$
4. $1 + \dfrac{1}{x} - x^2 + o(x - x^2)$
5. $\dfrac{1}{x^2} + 1 - x + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Exercice 10 (★★). Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, avec $b > 0$. On considère la suite u qui vérifie $u_n = a + \dfrac{b}{n} + \dfrac{c}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Est-elle monotone à partir d'un certain rang ?

Exercice 11 (★★). Soit $q > 1$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\varepsilon_n = \dfrac{q^n}{n!}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer ε_{n+1} en fonction de ε_n.
2. En déduire que $q^n \underset{n \to +\infty}{=} o(n!)$

Exercice 12 (★★). Comparer asymptotiquement (c'est-à-dire déterminer qui est négligeable devant qui) les suites a, b, c et d définies pour tout entier n par :

$$a_n = n! \qquad b_n = n^n \qquad c_n = (2n)! \qquad d_n = (2n)^n.$$

Exercice 13 (★). Déterminer le comportement lorsque $n \to +\infty$ de :

1. $\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$
2. $\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$
3. $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$
4. $\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$
5. $\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$

Exercice 14 (★★). Étudier les limites des fonctions suivantes (les équivalents et négligeabilités peuvent être nécessaires ou ne pas l'être) :

1. Limites en 1^+ et $+\infty$ de $a(x) = \ln\left(\sqrt{x} - 1\right) - \ln(x-1)$,
2. Limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de $b(x) = x2^x$,
3. Limite en 8 de $d(x) = \dfrac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2}$,
4. Limites en 0^+ et $+\infty$ de $f(x) = x \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.