Relations asymptotiques

Exercice 1 (★). Déterminer un équivalent simple lorsque $n \to +\infty$ de :

1. $n+2$
2. $\dfrac{1}{n}+2$
3. $3e^{2n}+2n^4$
4. $e^{\frac{1}{n}}\left(\cos(\frac{1}{n^2})-1\right)$
5. $\dfrac{1}{2n^2}-\dfrac{3}{n}+e^{-n}$
6. $(n+2)e^{n+3}$
7. $(n^2+n+1)\ln(n)$
8. $\dfrac{3}{5n^2+1}$
9. $(2n-\ln n)^3$
10. $\dfrac{\ln(n^2+1)}{\ln(n+1)}$
11. $\sqrt{4-\dfrac{4}{n}}-2$
12. $\left(\dfrac{n+e^n}{1+e^{2n}}\right)^2$
13. $\sqrt{\dfrac{2}{n^4}+\dfrac{2}{n^2}}$
14. $\dfrac{n\ln(n^2+n)+2n}{(n+1)^2\ln(n^5+1)}$
15. $\dfrac{(1+n)^2}{\cos(\frac{1}{n})}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$
16. $\ln(1+n)-\ln(n)$

Résultat attendu : On conjecture puis montre les équivalents en revenant à la définition :

1. n
2. 2
3. $3e^{2n}$
4. $-\dfrac{1}{2n^4}$
5. $-\dfrac{3}{n}$
6. ne^{n+3}
7. $n^2\ln(n)$
8. $\dfrac{3}{5n^2}$
9. $8n^3$
10. $\dfrac{\ln(n^2)}{\ln(n)}=2$
11. $-\dfrac{1}{n}$
12. e^{-2n}
13. $\dfrac{\sqrt{2}}{n}$
14. $\dfrac{n\ln(n^2)}{n^2\ln(n^5)}=\dfrac{2}{5n}$
15. n
16. $\dfrac{1}{n}$

Exercice 2 (★). Déterminer un équivalent simple lorsque $x \to +\infty$ puis lorsque $x \to 0$ (ou parfois 0^+) de :

1. $2+3x$
2. $2x^2-5x+7$
3. $x^4-2+\dfrac{4}{x}$
4. $\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}$
5. $\dfrac{x^3+1}{\ln(1+x^2)}$
6. $5\ln(x)+2$
7. $5\ln(x)+2x$
8. $5\ln(x)+\dfrac{2}{x}$
9. $\dfrac{1}{2x+3}$
10. $3e^x+x-1$
11. $\dfrac{x-3x^3}{2x^2+x^4}$
12. $\dfrac{3x^2}{x^2+x^3}$
13. $\dfrac{2e^x+x^2+3}{e^{2x}+x^3}$
14. $\dfrac{x^2\ln(2+x+e^x)}{x+x^2}$
15. $\dfrac{1}{3x-2}$
16. $\left(\ln(2x+4x^4)\right)^2$
17. $\ln(1+2x+3x^2)$

Résultat attendu : On conjecture puis montre les équivalents en revenant à la définition, d'abord en $+\infty$:

1. $3x$
2. $2x^2$
3. x^4
4. $\dfrac{2}{x}$
5. $\dfrac{x^3}{2\ln(x)}$
6. $5\ln(x)$
7. $2x$
8. $5\ln(x)$
9. $\dfrac{1}{2x}$
10. $3e^x$
11. $-\dfrac{3}{x}$
12. $\dfrac{3}{x}$
13. $2e^{-x}$
14. x
15. $\dfrac{1}{3x}$
16. $16(\ln(x))^2$
17. $\ln(3x^2)$

Puis en 0 :

1. 2
2. 7
3. $\dfrac{4}{x}$
4. $-\dfrac{3}{x^2}$
5. $\dfrac{1}{x^2}$
6. $5\ln(x)$
7. $5\ln(x)$
8. $\dfrac{2}{x}$
9. $\dfrac{1}{3}$
10. 2
11. $\dfrac{1}{2x}$
12. 3
13. 5
14. $x\ln(3)$
15. $-\dfrac{1}{2}$
16. $(\ln(x))^2$
17. $2x$

Exercice 3 (★★). Trouver un équivalent simple de $\ln\left(1-\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

Résultat attendu : Les équivalents usuels donnent $\ln\left(1-\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\sim-\dfrac{1}{n}$

Exercice 4 (★★). Soit u une suite telle que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>0$ qui vérifie $\ln\left(\dfrac{2}{u_n}\right)\sim\dfrac{1}{n^2}$. Montrer que u converge vers une limite ℓ et donner un équivalent de $(u_n-\ell)$.

Résultat attendu : u converge vers 2 et $u_n-2\sim-\dfrac{2}{n^2}$.

Exercice 5 (★★). Soient u et v deux suites à valeurs strictement positives telles que $\begin{cases} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ \lim u_n=\lim v_n=+\infty \end{cases}$.

1. Montrer que $\ln(u_n)\sim\ln(v_n)$.
2. Montrer qu'on n'a pas forcément $e^{u_n}\sim e^{v_n}$.

3. Application : déterminer un équivalent de $\dfrac{\ln(n^2+3n+2)}{\ln(n)}$ et de $\dfrac{n^2+1}{\ln(e^n+n)}$.

Résultat attendu :

1. Retour à la définition
2. Contre exemple.
3. $\dfrac{\ln(n^2+3n+2)}{\ln(n)} \sim 2$ et $\dfrac{n^2+1}{\ln(e^n+n)} \sim n$.

Exercice 6 (★). Simplifier au maximum les expressions suivantes, en restant le plus précis possible.

1. $n^2 O(n^3)$
2. $\dfrac{1}{n^2} o(n)$
3. $o(n^2) \times o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$
4. $o(e^{-n}) \times O(n)$
5. $O(\ln(n)) \times O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$
6. $\left(\dfrac{3}{\ln(n)}\right) o(n^2) \times o(e^{-n})$
7. $2o(\sqrt{n}) + o(\sqrt{n})$
8. $O\left(\dfrac{1}{n}\right) - O\left(\dfrac{1}{n}\right)$
9. $o(e^{-n}) - 2O(e^{-n})$
10. $\dfrac{1}{n}(o(\ln(n)) - o(\ln(n)))$
11. $e^n + O(e^n)$
12. $o(n^2) + o(n^3)$
13. $o(e^{-n}) + o(e^{-2n})$
14. $\dfrac{1}{n^3} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$
15. $n + o(n\ln(n)) + o(\ln(n))$

Résultat attendu : On conjecture puis montre les expressions en revenant à la définition :

1. $O(n^5)$
2. $o\left(\dfrac{1}{n}\right)$
3. $o\left(\dfrac{1}{n}\right)$
4. $o(ne^{-n})$
5. $O\left(\dfrac{\ln(n)}{n^3}\right)$
6. $o\left(\dfrac{n^2e^{-n}}{\ln(n)}\right)$
7. $o(\sqrt{n})$
8. $O\left(\dfrac{1}{n}\right)$
9. $O(e^{-n})$
10. $o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$
11. $O(e^n)$
12. $o(n^3)$
13. $o(e^{-n})$
14. $o\left(\dfrac{1}{n}\right)$
15. $o(n\ln(n))$

Exercice 7 (★).

1. Simplifier au maximum les expressions suivantes (les O et o sont en $x \to +\infty$), en restant le plus précis possible.
   (a) $o(x+1)$
   (b) $o(5x^2) - o(2x^3)$
   (c) $O(x) - O(x^2)$
   (d) $\ln(x)\left(o(x) + o(x^2)\right)$
   (e) $O(2 + x - 3x^4)$
   (f) $o\left(\dfrac{1}{x}\right) + o(1)$
   (g) $o\left(x^2 - 2 - \dfrac{1}{x^3}\right)$
   (h) $o\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right)$
   (i) $o\left(\dfrac{1}{x+2}\right)$
2. Réaliser le même travail avec cette fois-ci les O et o en $x \to 0$ (0^+ lorsqu'on utilise un logarithme).

Résultat attendu : On conjecture puis montre les expressions en revenant à la définition :

1. (a) $o(x)$ (b) $o(x^3)$ (c) $O(x^2)$
   (d) $o(x^2\ln(x))$ (e) $O(x^4)$ (f) $o(1)$
   (g) $o(x^2)$ (h) $o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ (i) $o\left(\frac{1}{x}\right)$
2. (a) $o(1)$ (b) $o(x^2)$ (c) $O(x)$
   (d) $o(x\ln(x))$ (e) $O(1)$ (f) $o\left(\frac{1}{x}\right)$
   (g) $o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ (h) $o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ (i) $o(1)$

Exercice 8 (★). Vrai ou faux ? Justifier.

1. $n^2 \underset{n\to+\infty}{=} o(e^n)$
2. $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$
3. $n^5 \underset{n\to+\infty}{=} o(e^n)$
4. $\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$
5. $\frac{1}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$
6. $5n^4 - 3n^2 - 1 \underset{n\to+\infty}{=} O(n^4)$
7. $o(n^2) \underset{n\to+\infty}{=} o(n^3)$
8. $o(n^3) \underset{n\to+\infty}{=} o(n^2)$

Résultat attendu :

1. Vrai
2. Vrai
3. Vrai
4. Vrai
5. Faux
6. Vrai
7. Vrai
8. Faux

Exercice 9 (★). Simplifier au maximum (et sans perdre de précision) les expressions suivantes (les O et o sont en $x \to 0$) :

1. $1+2x-x^2+o(x)$
2. $5x^5-3x^2+o(x^3)$
3. $-2+x^2-x^3+o(x+1)$
4. $1+\dfrac{1}{x}-x^2+o(x-x^2)$
5. $\dfrac{1}{x^2}+1-x+o\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Résultat attendu :

1. $1+2x+o(x)$
2. $-3x^2+o(x^3)$
3. $-2+o(1)$
4. $1+\dfrac{1}{x}+o(x)$
5. $\dfrac{1}{x^2}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Exercice 10 (★★). Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, avec $b>0$. On considère la suite u qui vérifie $u_n=a+\dfrac{b}{n}+\dfrac{c}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Est-elle monotone à partir d'un certain rang ?
Résultat attendu : La suite u est décroissante à partir d'un certain rang.

Exercice 11 (★★). Soit $q>1$. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\varepsilon_n=\dfrac{q^n}{n!}$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Exprimer ε_{n+1} en fonction de ε_n.
2. En déduire que $q^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$

Résultat attendu :

1. $\varepsilon_{n+1}=\dfrac{q}{n+1}\varepsilon_n$
2. On montre que $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, puis on passe à la limite dans l'égalité de la question précédente pour montrer que sa limite vaut 0.

Exercice 12 (★★). Comparer asymptotiquement (c'est-à-dire déterminer qui est négligeable devant qui) les suites a, b, c et d définies pour tout entier n par :

$$a_n=n! \qquad b_n=n^n \qquad c_n=(2n)! \qquad d_n=(2n)^n.$$

Résultat attendu : $n!=o(n^n)$ puis $n^n=o((2n)^n)$ puis $(2n)^n=o((2n)!)$.

Exercice 13 (★). Déterminer le comportement lorsque $n\to+\infty$ de :

1. $\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$
2. $\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$
3. $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$
4. $\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$
5. $\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$

Résultat attendu : Les limites valent :

1. $e^0=1$
2. $+\infty$
3. e^{-1}
4. $e^0=1$
5. 0

Exercice 14 (★★). Étudier les limites des fonctions suivantes (les équivalents et négligeabilités peuvent être nécessaires ou ne pas l'être) :

1. Limites en 1^+ et $+\infty$ de $a(x)=\ln(\sqrt{x}-1)-\ln(x-1)$,
2. Limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de $b(x)=x2^x$,
3. Limite en 8 de $d(x)=\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$,
4. Limites en 0^+ et $+\infty$ de $f(x)=x\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

Résultat attendu :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} a(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1+} a(x)=\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\ln(2)$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} b(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} b(x)=0$.
3. $\lim\limits_{x\to8} d(x)=12$.
4. $\lim\limits_{x\to0+} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$.