Rudiments de logique

Exercice 1 (★). On tire 4 cartes dans un jeu. Donner la négation des affirmations suivantes :

1. Les quatre cartes sont rouges.
2. Il y a au moins deux cœurs.
3. Il n'y a aucun pique ou que des piques.
4. Il y a au moins un pique et un cœur.

Exercice 2 (★). Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. La fonction f s'annule au moins une fois.
2. La fonction f est la fonction nulle.
3. La fonction f est constante.
4. La fonction f est paire.

Exercice 3 (★★). Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. La fonction f n'est pas impaire.
2. La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur.
3. L'équation $f(x) = 2$ admet au moins deux solutions distinctes.
4. La fonction f n'est pas majorée.

Exercice 4 (★★). Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Les réponses sont à justifier soigneusement.

1. $\forall r \in \mathbb{R}$, $\exists s \in \mathbb{R}$ tel que $r = e^s - 1$.
2. $\exists A \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A > e^{-n}$.

Exercice 5 (★). Peut-on compléter les phrases suivantes par le symbole $\Rightarrow$? Le symbole $\Leftarrow$? Les réponses devront être rigoureusement justifiées.

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x \geqslant 1) \ \dots \ (e^x \geqslant 1)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $(x \geqslant y) \ \dots \ (x^2 \geqslant y^2)$
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $(x = y) \ \dots \ (\cos(x) = \cos(y))$
4. $\forall m \in \mathbb{N}$, $(m \text{ pair}) \ \dots \ (m \text{ multiple de } 6)$
5. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $(\cos(x) = \cos(y)) \ \dots \ (x^2 = y^2)$

Exercice 6 (★). Déterminer l'ensemble (noté D) des réels t tels que les nombres $\dfrac{t^2+2}{t^2-2}$ et $\dfrac{t-1}{t+1}$ sont bien définis, puis résoudre l'équation (d'inconnue $t \in D$) : $\dfrac{t^2+2}{t^2-2} = \dfrac{t-1}{t+1}$.

Exercice 7 (★★). Résoudre l'équation (d'inconnue $s \geqslant -1$) : $s + \sqrt{s+1} = 5$.

Exercice 8 (★). Soit n_1, n_2, n_3 des entiers naturels vérifiant $n_1 + n_2 + n_3 = 30$. Montrer qu'au moins un de ces entiers est supérieur à 10.

Exercice 9 (★★).

1. Montrer que le produit de deux entiers impairs est impair.
2. Montrer que réciproquement, si le produit de deux entiers est impair, alors ces deux entiers sont impairs.

Exercice 10 (★★). Montrer que $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est irrationnel.

Exercice 11 (★★). Déterminer toutes les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)f(y) = f(xy) + x + y.$$

Exercice 12 (★★★). Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui vérifient :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad f(m+n) = f(m) + f(n).$$

Exercice 13 (★). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 2$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2 \times 3^n - 1.$$

Exercice 14 (★). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est divisible par 3.

Exercice 15 (★★). Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [-1, +\infty[$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

Exercice 16 (★★). Montrer que pour tout entier $n \geqslant 4$, on a $2^n \geqslant n^2$.

Exercice 17 (★). Soit u la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2}(3 - 3^n)$.

Exercice 18 (★). Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 19 (★★★). Montrer qu'il n'existe pas de suite d'entiers naturels strictement décroissante.