

Exercice 1 (★). On tire 4 cartes dans un jeu. Donner la négation des affirmations suivantes :

1. Les quatre cartes sont rouges.
2. Il y a au moins deux cœurs.
3. Il n'y a aucun pique ou que des piques.
4. Il y a au moins un pique et un cœur.

Résultat attendu :

1. Il y a au moins une carte noire.
2. Il y a au plus un cœur.
3. Il y a entre 1 et 3 piques.
4. Il n'y a pas de pique ou il n'y a pas de cœur.

Exercice 2 (★). Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. La fonction f s'annule au moins une fois.
2. La fonction f est la fonction nulle.
3. La fonction f est constante.
4. La fonction f est paire.

Résultat attendu :

1. $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.
3. Deux possibilités : $(\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = k$) ou $(\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) = f(y))$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$.

Exercice 3 (★★). Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. La fonction f n'est pas impaire.
2. La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur.
3. L'équation $f(x) = 2$ admet au moins deux solutions distinctes.
4. La fonction f n'est pas majorée.

Résultat attendu :

1. $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $f(-x) \neq -f(x)$ (négation de $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$).
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$.
3. $\exists x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq y, f(x) = 2$ et $f(y) = 2$.
4. $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) > M$ (négation de $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$).

Exercice 4 (★★). Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Les réponses sont à justifier soigneusement.

1. $\forall r \in \mathbb{R}, \exists s \in \mathbb{R}$ tel que $r = e^s - 1$.
2. $\exists A \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, A > e^{-n}$.

Résultat attendu :

1. La phrase est fausse, il faut trouver un contre-exemple.
2. La phrase est vraie, on le montre par raisonnement direct.

Exercice 5 (★). Peut-on compléter les phrases suivantes par le symbole \implies ? Le symbole \iff ? Les réponses devront être rigoureusement justifiées.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, (x \geq 1) \dots (e^x \geq 1)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \geq y) \dots (x^2 \geq y^2)$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x = y) \dots (\cos(x) = \cos(y))$
4. $\forall m \in \mathbb{N}, (m \text{ pair}) \dots (m \text{ multiple de } 6)$
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (\cos(x) = \cos(y)) \dots (x^2 = y^2)$

Résultat attendu :

1. (\implies) est vraie, (\iff) est fausse en général.

2. (\Rightarrow) est fausse en général, (\Leftarrow) est fausse en général.
3. (\Rightarrow) est vraie, (\Leftarrow) est fausse en général.
4. (\Rightarrow) est fausse en général, (\Leftarrow) est vraie.
5. (\Rightarrow) est fausse en général, (\Leftarrow) est vraie.

Exercice 6 (★). Déterminer l'ensemble (noté D) des réels t tels que les nombres $\frac{t^2+2}{t^2-2}$ et $\frac{t-1}{t+1}$ sont bien définis, puis résoudre l'équation (d'inconnue $t \in D$) : $\frac{t^2+2}{t^2-2} = \frac{t-1}{t+1}$.

Résultat attendu : $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ et l'ensemble des solutions de l'équation est $\{-2, 0\}$.

Exercice 7 (★★). Résoudre l'équation (d'inconnue $s \geq -1$) : $s + \sqrt{s+1} = 5$.

Résultat attendu : L'unique solution est 3.

Exercice 8 (★). Soit n_1, n_2, n_3 des entiers naturels vérifiant $n_1 + n_2 + n_3 = 30$. Montrer qu'au moins un de ces entiers est supérieur à 10.

Résultat attendu : On raisonne par l'absurde.

Exercice 9 (★★).

1. Montrer que le produit de deux entiers impairs est impair.
2. Montrer que réciproquement, si le produit de deux entiers est impair, alors ces deux entiers sont impairs.

Résultat attendu :

1. On raisonne de manière directe.
2. On raisonne par contraposition puis par disjonction de cas.

Exercice 10 (★★). Montrer que $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est irrationnel.

Résultat attendu : On raisonne par l'absurde.

Exercice 11 (★★). Déterminer toutes les applications f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)f(y) = f(xy) + x + y.$$

Résultat attendu : On raisonne par analyse-synthèse. La seule application qui convient est $f : x \mapsto 1 + x$.

Exercice 12 (★★★). Trouver toutes les fonctions f de \mathbb{N} dans \mathbb{N} qui vérifient :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad f(m+n) = f(m) + f(n).$$

Résultat attendu : On raisonne par analyse-synthèse. Les fonctions qui conviennent sont celles de la forme $f : n \rightarrow n \times C$ avec $C \in \mathbb{N}$.

Exercice 13 (★). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2 \times 3^n - 1.$$

Résultat attendu : On raisonne par récurrence simple.

Exercice 14 (★). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, n^3 - n$ est divisible par 3.

Résultat attendu : On raisonne par récurrence simple.

Exercice 15 (★★). Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1, +\infty[, (1+x)^n \geq 1+nx$.

Résultat attendu : On raisonne par récurrence simple.

Exercice 16 (★★). Montrer que pour tout entier $n \geq 4$, on a $2^n \geq n^2$.

Résultat attendu : On raisonne par récurrence simple.

Exercice 17 (★). Soit u la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = 0$, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2}(3 - 3^n)$.

Résultat attendu : On raisonne par récurrence double.

Exercice 18 (★). Soit u la suite définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .

Résultat attendu : On montre par récurrence forte que $\forall n \geq 1, u_n = 2^{n-1}$.

Exercice 19 (★★★). Montrer qu'il n'existe pas de suite d'entiers naturels strictement décroissante.

Résultat attendu : On raisonne par l'absurde.