Exercices: Séries

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, donner une expression en fonction de n de la somme partielle de la série de terme général u_n, en déduire si la série converge puis donner sa somme si possible.

1. $u_n = n^2$ 2. $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 3. $u_n = \frac{2}{3^n}$ 4. $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

Exercice 2. Dans chacun des cas suivants, donner une expression en fonction de n de la somme partielle de la série de terme général u_n, en déduire si la série converge puis donner sa somme si possible.

1. $u_n = \frac{5}{6^n}$ 2. $u_n = 2^n$ 3. $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ 4. $u_n = \frac{5}{(2n+1)(2n+3)}$

Exercice 3. Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme.

1. $\sum\limits_{k\geqslant 1} k\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$ 2. $\sum\limits_{k\geqslant 0} k(k-1)\frac{1}{4^{k-2}}$ 3. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{2^n}{n!}$ 4. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(n+2)!}$ 5. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{n^2+n+1}{n!}$

Exercice 4. Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme (pour $x \in \mathbb{R}$)

1. $\sum\limits_{k\geqslant 2} \binom{k}{2}\frac{1}{10^{k-2}}$ 2. $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{3(k-1)}{2^k}$ 3. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{n(n-1)}{6^n}$ 4. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n n}{2^n}$ 5. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{nx^n}{n!}$

Exercice 5. Étudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants.

1. $u_n = \frac{n}{n+1}$ 2. $u_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ 3. $u_n = \frac{\ln n}{n^2}$ 4. $u_n = \ln\left(\frac{2+\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{2-\sin\left(\frac{1}{n}\right)}\right)$

Exercice 6. Étudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants.

1. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ 2. $u_n = \ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)$ 3. $u_n = \frac{1}{n^2+\sin(n^6)}$

Exercice 7. Dans chacun des cas suivants, préciser si la série de terme général u_n est absolument convergente, et si elle est convergente.

1. $u_n = \frac{\sin(n)}{n^2}$ 2. $u_n = \frac{\cos(n^2)+n\sin(n)}{n^2\sqrt{n}}$ 3. $u_n = \frac{(-1)^n\ln(n)}{e^n}$ 4. $u_n = \frac{1+n\cos(n\pi)}{n^2}$

Exercice 8. On suppose que $\sum u_n$ est une série à termes positifs convergente. Montrer alors que la série de terme général $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$ converge aussi.

Exercice 9. On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

1. Montrer que cette série converge.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrire u_n sous la forme $u_n = \frac{a}{n+1}+\frac{b}{n+2}+\frac{c}{n+3}$.
3. Calculer alors la somme de la série.

Exercice 10 (Critère de d'Alembert, difficile)**.** Soit u une suite à termes strictement positifs.

1. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\lambda < 1$, la série $\sum u_n$ converge et que si $\lambda > 1$ elle diverge.
2. En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{4}\right)^n$.
3. En observant les cas où $u_n = \frac{1}{n}$ et $u_n = \frac{1}{n^2}$, que peut-on dire du cas où $\lambda = 1$?

Exercice 11. On définit la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^3}$.

1. Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.
2. Montrer que pour tout entier $m \geqslant 1$, on a $\sum\limits_{k=n}^{n+m}\frac{1}{(k+1)^3} \leqslant \int_n^{n+m+1}\frac{1}{x^3}dx \leqslant \sum\limits_{k=n}^{n+m}\frac{1}{k^3}$.
3. En déduire un équivalent de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 12. Dans tout cet exercice $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite réelle décroissante de limite nulle. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $b_n = n(a_{n-1} - a_n)$.

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k\right) - na_n$.
2. On suppose dans cette question que la série de terme général a_n converge.
   (a) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$.
   Indication : on pourra commencer par étudier $2na_{2n}$.
   (b) En déduire que la série de terme général b_n converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
3. On suppose dans cette question que la série de terme général b_n converge.
   (a) Montrer que pour tout n et k de $\mathbb{N}^*$, on a : $n(a_n - a_{n+k}) \leqslant \displaystyle\sum_{j=n+1}^{n+k} b_j$.
   (b) En déduire que la série de terme général a_n converge et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.