Séries

Exercice 1 (★). Dans chacun des cas suivants, déterminer si la série converge puis donner sa somme si possible :

1. $\sum_{n\geqslant 0} n^2$
2. $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$
3. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2}{3^n}$
4. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$
5. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{5}{6^n}$
6. $\sum_{n\geqslant 0} 2^n$
7. $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{2}{3}\right)^n$
8. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n}{n!}$

Résultat attendu :

1. diverge
2. converge vers 2
3. converge vers 3
4. converge vers 1
5. converge vers 6
6. diverge
7. converge vers 3
8. converge vers e^2

Exercice 2 (★★). Dans chacun des cas suivants, déterminer si la série converge puis donner sa somme si possible :

1. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(n+2)!}$
2. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+n+1}{n!}$
3. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{5}{(2n+1)(2n+3)}$

Résultat attendu :

1. converge vers e^{-1}
2. converge vers $4e$
3. converge vers $\frac{5}{2}$.

Exercice 3 (★★). On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

1. Montrer que cette série converge.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrire u_n sous la forme $u_n = \dfrac{a}{n+1} + \dfrac{b}{n+2} + \dfrac{c}{n+3}$.
3. Calculer alors la somme de la série.

Résultat attendu :

1. On se ramène aux critères de convergence des séries de terme général positif.
2. $a = c = \frac{1}{2}$ et $b = -1$ conviennent.
3. La somme de la série vaut $\frac{1}{4}$.

Exercice 4 (★). Étudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants.

1. $u_n = \dfrac{n}{n+1}$
2. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$
3. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$
4. $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{2n}\right)$
5. $u_n = \dfrac{1}{n^2+\sin(n^6)}$
6. $u_n = \dfrac{n^2+3n+4}{2(n+1)^4+\ln(n)}$
7. $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^3}$
8. $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n^2}$
9. $u_n = \dfrac{(-1)^n\ln(n)}{e^n}$
10. $u_n = \dfrac{(-1)^n\tan(\frac{1}{n})n^2}{e^{\frac{n}{2}}}$
11. $u_n = \dfrac{3n^2-\ln(n+1)}{5(n+1)^3}$
12. $u_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$

Résultat attendu :

1. diverge
2. diverge
3. converge
4. diverge
5. converge
6. converge
7. converge
8. converge
9. converge
10. converge
11. diverge
12. diverge

Exercice 5 (★). Étudier la convergence des séries de terme général

1. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) + \ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$
2. $v_n = \tan\left(\dfrac{1}{n}\right) + \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

Résultat attendu :

1. converge
2. diverge

Exercice 6 (★). On suppose que $\sum u_n$ est une série à termes positifs convergente. Montrer alors que la série de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ converge aussi.

Résultat attendu : On montre que v est à termes positifs, et on se ramène à une comparaison avec u.

Exercice 7 (★★). Étudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants.

1. $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^2}$
2. $u_n = \ln\left(\dfrac{2+\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{2-\sin\left(\frac{1}{n}\right)}\right)$
3. $u_n = \dfrac{\cos(n^2)+n\sin(n)}{n^2\sqrt{n}}$

Résultat attendu :

1. converge
2. diverge
3. converge

Exercice 8 (★★). On définit la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.

1. Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.
2. Montrer que pour tous entiers n et m dans $\mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{(k+1)^3} \leqslant \int_n^{n+m+1} \frac{1}{x^3}dx \leqslant \sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{k^3}$.
3. En déduire un équivalent de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Résultat attendu :

1. C'est le reste d'une série convergente, v converge donc vers 0.
2. On procède par encadrement série/intégrale.
3. $v_n \sim \frac{1}{2n^2}$.

Exercice 9 (★★★). Démontrer la convergence de la série de terme général ne^{-n^2}, puis montrer que ses restes R_n vérifient $|R_n| \leqslant \dfrac{1}{2}e^{-n^2}$ pour tout $n \geqslant 1$.

Résultat attendu : Pour la convergence, on utilise les propriétés des séries à terme général positif. Pour l'inégalité, on utilise une comparaison série/intégrale bien choisie, puis on calcule l'intégrale par primitivation de l'expression.

Exercice 10 (★★). Soit $x \in]-1,1[$ et P un polynôme de degré inférieur à 2. On cherche à étudier $\sum P(n)x^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit la fonction $S_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier que S_n est de classe C^∞ sur $]-1,1[$.
2. En exprimant $S_n'(x)$ de deux manières différentes, montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(n+1)x^n$ converge et donner sa somme.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(n+1)(n+2)x^n$ est convergente et donner sa somme.
4. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n$ existent et déterminer leurs valeurs.
5. De façon générale, quelle méthode adopter pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$ quelconque ?

Résultat attendu :

1. C'est une fonction polynôme.
2. On dérive une fois le polynôme, une fois l'expression obtenue par formule de somme géométrique. L'égalité entre les deux expressions donne la convergence de la série étudiée vers $\frac{1}{(1-x)^2}$.
3. On procède de même en redérivant. On obtient une convergence vers $\frac{2}{(1-x)^3}$.
4. On procède par combinaison linéaire de séries convergentes. Les sommes valent $\frac{x}{(1-x)^2}$ et $\frac{-3+x-2x^2}{(1-x)^3}$.