

Exercice 1 (★). Soit $n \geq 5$ un entier et $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Écrire les sommes suivantes à l'aide d'un symbole \sum .

1. $\frac{1^2}{e^2} + \frac{2^2}{e^3} + \dots + \frac{n^2}{e^{n+1}}$
2. $1 - a + a^2 - a^3 + \dots + a^{2n} - a^{2n+1}$
3. $a^n b + \frac{a^{n-1} b^2}{2} + \dots + \frac{a b^n}{n} + \frac{b^{n+1}}{n+1}$

Exercice 2 (★). Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies? Pourquoi?

1. $\sum_{k=1}^n (\alpha + a_k) = \alpha + \sum_{i=1}^n a_i$
2. $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{j=1}^n b_j$
3. $\sum_{k=1}^n \alpha a_k = \alpha \sum_{k=1}^n a_k$
4. $\sum_{k=1}^n a_k^\alpha = \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^\alpha$
5. $\sum_{k=1}^n a_k b_k = \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k \right)$

Exercice 3 (★). Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes (on donnera le résultat sous forme factorisée) :

1. $\sum_{\ell=0}^{3n} 2(\ell - 1)$
2. $\sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n} \right)$
3. $\sum_{k=2}^n k(1 - k)$

Exercice 4 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer la somme $\sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k+2}{k} \right)$.

Exercice 5 (★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{n^2} \frac{1}{2^k}$
2. $\sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{3} \right)^{k+1}$
3. $\sum_{k=1}^n \frac{6}{2^k}$
4. $\sum_{k=1}^{n-1} x^k$

Exercice 6 (★★). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n k^2$.

En calculant $T_n = \sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3)$ de deux façons différentes, retrouver la formule $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 7 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes $\sum_{k=1}^n (k \times k!)$ et $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$.

Indication : $k = k + 1 - 1$.

Exercice 8 (★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $\alpha \in \mathbb{R}$. Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies? Pourquoi?

1. $\prod_{k=1}^n (\alpha a_k) = \alpha \prod_{k=1}^n a_k$
2. $\prod_{k=1}^n (a_k b_k) = \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) \left(\prod_{k=1}^n b_k \right)$
3. $\prod_{k=1}^n (a_k + b_k) = \prod_{k=1}^n a_k + \prod_{k=1}^n b_k$

Exercice 9 (★★). Soit $n \geq 2$ un entier. Calculer les sommes et produits suivants.

1. $\sum_{p=2}^{n^2} (3p + 2^{p+1})$
2. $\sum_{k=0}^n 2^k 3^{n-k}$
3. $\prod_{p=2}^n \left(1 - \frac{1}{p^2} \right)$
4. $\sum_{j=0}^n ((j+2)^3 - j^3)$

Exercice 10 (★★). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les sommes à double indice suivantes :

1. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i + j)$
2. $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i + j)$
3. $\sum_{0 \leq i \leq k \leq n} \frac{i}{k+1}$
4. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j)$

Exercice 11 (★★★). Soit n un entier naturel. Calculer le produit $\prod_{1 \leq i, j \leq n} ij$.

Exercice 12 (★). On considère la suite définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} u_n$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{(2n-2)!}{(2^{n-1}(n-1)!)^2}.$$

Exercice 13 (★★★). Démontrer par récurrence que pour tout entier n non nul :

$$\prod_{k=1}^n (2k)! \geq ((n+1)!)^n.$$

Exercice 14 (★). Calculer :

1. $\binom{9}{4}$ 2. $\binom{10}{3}$ 3. $\binom{10}{6}$ 4. $\binom{9}{3}$

Exercice 15 (★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $A_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ et $B_n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 2^p$.

Exercice 16 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer $C_n = \sum_{i=2}^{2n} \binom{2n}{i} (-1)^i$ et $D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 3^k x^{n-k}$.

Exercice 17 (★). Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j \binom{j}{i}$.

Exercice 18 (★★). Soit $n \geq 1$, et f_n la fonction définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^k}{n}$.

1. Donner pour tout réel x une expression de $f_n(x)$ sans symbole \sum .
2. Dériver f_n sous ces deux formes pour calculer $\sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k}$.
3. Retrouver le résultat de la question précédente sans utiliser la fonction f_n , en utilisant les propriétés des coefficients binomiaux.
4. Calculer $\sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n} \binom{n}{k}$. On pourra écrire $k^2 = k(k-1) + k$.