Sommes et produits

Exercice 1 (★). Soit $n \geqslant 5$ un entier et $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Écrire les sommes suivantes à l'aide d'un symbole $\sum$.

1. $\dfrac{1^2}{e^2} + \dfrac{2^2}{e^3} + \ldots + \dfrac{n^2}{e^{n+1}}$
2. $1 - a + a^2 - a^3 + \ldots + a^{2n} - a^{2n+1}$
3. $a^n b + \dfrac{a^{n-1}b^2}{2} + \ldots + \dfrac{ab^n}{n} + \dfrac{b^{n+1}}{n+1}$

Résultat attendu :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{e^{k+1}}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a^k$ ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (a^{2k} - a^{2k+1})$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{a^{n-k+1}b^k}{k}$ ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^{n-k}b^{k+1}}{k+1}$

Exercice 2 (★). Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies ? Pourquoi ?

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\alpha + a_k) = \alpha + \sum_{i=1}^{n} a_i$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{j=1}^{n} b_j$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha a_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^{\alpha} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^{\alpha}$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$

Résultat attendu :

1. Fausse (contre-exemple)
2. Vraie (linéarité)
3. Vraie (linéarité)
4. Fausse (contre-exemple)
5. Fausse (contre-exemple)

Exercice 3 (★). Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes (on donnera le résultat sous forme factorisée) :

1. $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{3n} 2(\ell - 1)$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)$
3. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(1-k)$

Résultat attendu :

1. $(3n+1)(3n-2)$
2. $\dfrac{n+1}{2}$
3. $\dfrac{n(n+1)(1-n)}{3}$

Exercice 4 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+2}{k}\right)$.

Résultat attendu : Sous forme simplifiée, la somme vaut $\ln\left(\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}\right)$.

Exercice 5 (★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} \frac{1}{2^k}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{6}{2^k}$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} x^k$

Résultat attendu :

1. $2 - \dfrac{1}{2^{n^2}}$
2. $-\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$
3. $6\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$
4. $n-1$ si $x = 1$, $\dfrac{x - x^n}{1-x}$ sinon

Exercice 6 (★★). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

En calculant $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} ((k+1)^3 - k^3)$ de deux façons différentes, retrouver la formule $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Résultat attendu : L'un des calculs se fait par télescopage et donne $T_n = n^3 + 3n^2 + 3n$, l'autre par linéarité après avoir développé l'intérieur de la somme et donne $T_n = 3S_n + 3\frac{n(n+1)}{2} + n$.

Exercice 7 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k \times k!)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.

Indication : $k = k + 1 - 1$.

Résultat attendu : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k \times k!) = (n+1)! - 1$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

Exercice 8 (★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $\alpha \in \mathbb{R}$. Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies ? Pourquoi ?

1. $\prod_{k=1}^{n}(\alpha a_k) = \alpha \prod_{k=1}^{n} a_k$ 2. $\prod_{k=1}^{n}(a_k b_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)$ 3. $\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \prod_{k=1}^{n} a_k + \prod_{k=1}^{n} b_k$

Résultat attendu :

1. Fausse (contre-exemple) 2. Vraie (l'ordre n'importe pas) 3. Fausse (contre-exemple)

Exercice 9 (★★). Soit $n \geqslant 2$ un entier. Calculer les sommes et produits suivants.

1. $\sum_{p=2}^{n^2}(3p + 2^{p+1})$ 2. $\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k}$ 3. $\prod_{p=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$ 4. $\sum_{j=0}^{n}((j+2)^3 - j^3)$

Résultat attendu :

1. $\frac{3}{2}n^2(n^2+1) - 11 + 2^{n^2+2}$
2. $3^{n+1} - 2^{n+1}$
3. $\frac{n+1}{2n}$
4. $2n^3 + 9n^2 + 15n + 8$

Exercice 10 (★★). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les sommes à double indice suivantes :

1. $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)$ 2. $\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} (i+j)$ 3. $\sum_{0 \leqslant i \leqslant k \leqslant n} \frac{i}{k+1}$ 4. $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min(i,j)$

Résultat attendu :

1. $n^2(n+1)$ 2. $\frac{n(n+1)(n-1)}{2}$ 3. $\frac{n(n+1)}{4}$ 4. $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 11 (★★★). Soit n un entier naturel. Calculer le produit $\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij$.

Résultat attendu : $\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij = (n!)^{2n}$.

Exercice 12 (★). On considère la suite définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} u_n$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{(2n-2)!}{(2^{n-1}(n-1)!)^2}.$$

Résultat attendu : On le montre par récurrence.

Exercice 13 (★★★). Démontrer par récurrence que pour tout entier n non nul :

$$\prod_{k=1}^{n}(2k)! \geqslant ((n+1)!)^n .$$

Résultat attendu : L'hérédité se montre à partir de l'hypothèse de récurrence, en effectuant des produits d'inégalités à termes positifs.

Exercice 14 (★). Calculer :

1. $\binom{9}{4}$ 2. $\binom{10}{3}$ 3. $\binom{10}{6}$ 4. $\binom{9}{3}$

Résultat attendu :

1. 126 2. 120 3. 210 4. 84

Exercice 15 (★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $B_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p$.

Résultat attendu : $A_n = 2^n$ et $B_n = 3^n$.

Exercice 16 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer $C_n = \sum_{i=2}^{2n} \binom{2n}{i} (-1)^i$ et $D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 3^k x^{n-k}$.

Résultat attendu : $C_n = 2n - 1$ et $D_n = (x+3)^n - 3^n$.

Exercice 17 (★). Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}$.

Résultat attendu : $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i} = 2^{n+1}-1$.

Exercice 18 (★★). Soit $n \geqslant 1$, et f_n la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^k}{n}$.

1. Donner pour tout réel x une expression de $f_n(x)$ sans symbole $\sum$.
2. Dériver f_n sous ces deux formes pour calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}$.
3. Retrouver le résultat de la question précédente sans utiliser la fonction f_n, en utilisant les propriétés des coefficients binomiaux.
4. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n}\binom{n}{k}$. On pourra écrire $k^2 = k(k-1)+k$.

Résultat attendu :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{1}{n}(x+1)^n$.
2. Dériver donne $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1} = \frac{1}{n}n(x+1)^{n-1}$. Le cas $x=1$ donne alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k} = 2^{n-1}$.
3. On utilise la formule "sans nom", un changement d'indice et la formule du binôme de Newton.
4. Réutiliser la méthode d'une des deux questions précédentes donne $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n}\binom{n}{k} = (n+1)2^{n-2}$.