Exercices: Systèmes linéaires

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre par la méthode du Pivot de Gauss les systèmes d'inconnues (x, y, z) :

1. $\left\{\begin{array}{rcl} (2-a)x+y+az & = & 0 \\ y-az & = & 2 \\ az & = & 1 \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{rcl} (2-a)x+y+az & = & 0 \\ y-az & = & 2 \\ az & = & 0 \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y-2z & = & -5 \\ x+2y+z & = & 3 \\ x-5y-3z & = & -2 \end{array}\right.$
4. $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-3z & = & 1 \\ 3x-y+2z & = & 0 \\ x-5y+8z & = & -2 \end{array}\right.$
5. $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-3z & = & 13 \\ 2x-5y-3z & = & -7 \\ -x+2y+z & = & 3 \end{array}\right.$

Exercice 2. Résoudre l'équation $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Les matrices suivantes définissent-elles des systèmes de Cramer ?

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,
2. $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 8 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$,
3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -9 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit x, y, z et t des réels donnés. En déduire la résolution du système d'inconnues (a, b, c, d) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -b+c+d & = & x \\ -9a+2b+c+2d & = & y \\ a-b+c & = & z \\ -3a+c+d & = & t \end{array}\right. .$$

Exercice 5. Résoudre, en discutant selon les valeurs du réel m, le système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \left\{\begin{array}{rcl} x-2y+2z & = & 0 \\ 2x+y+2mz & = & 1 \\ 2x-2y+3z & = & -1 \end{array}\right. .$$

Exercice 6. Soit $m \in \mathbb{R}$.

1. On donne la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

   Pour quelles valeurs de m la matrice M est-elle inversible ?

2. Résoudre, en discutant selon les valeurs de m, le système d'inconnue (x, y, z, t) :

$$(S) \left\{\begin{array}{rcl} mx+y+z+t & = & 0 \\ x+my+z+t & = & 0 \\ x+y+mz+t & = & 0 \\ x+y+z+mt & = & 0 \end{array}\right. .$$

Exercice 7. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{C}$ le système suivant d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ est-il de Cramer ?

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+ay+a^2z & = & 0 \\ \overline{a}x+y+az & = & 0 \\ \overline{a}^2x+\overline{a}y+z & = & 0 \end{array}\right. .$$

Exercice 8. En utilisant un système linéaire, déterminer tous les polynômes P de degré 3, à coefficients réels, tels que P admette -2, $\frac{1}{2}$ et 1 pour racines et vérifie $P(0) = -2$.

Exercice 9. Soit f l'application définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (2x+y-z, x+2y, x-z)$. L'application f est-elle une surjection ? une injection ? Déterminer f^{-1} si elle existe.