Exercices PCSI
É.Bouchet

Trigonométrie

Exercice 1 (★). Résoudre les équations suivantes :

1. $\sin(t) = \dfrac{1}{2}$ pour $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$
2. $\sin(t) = \dfrac{1}{2}$ pour $t \in [-\pi, \pi]$
3. $\sin(t) = \dfrac{1}{2}$ pour $t \in \mathbb{R}$
4. $\cos(t) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ pour $t \in \mathbb{R}$

Résultat attendu :

1. L'unique solution est $t = \dfrac{\pi}{6}$.
2. Les solutions sont $t = \dfrac{\pi}{6}$ ou $t = \dfrac{5\pi}{6}$.
3. Les solutions sont $t \equiv \dfrac{\pi}{6}[2\pi]$ ou $t \equiv \dfrac{5\pi}{6}[2\pi]$.
4. Les solutions sont $t \equiv \dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$ ou $t \equiv -\dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$.

Exercice 2 (★★). En s'aidant du cercle trigonométrique, résoudre les inéquations suivantes :

1. $\sin(t) \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$
2. $\sin(t) \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour $t \in [-\pi, \pi]$
3. $\sin(t) \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour $t \in \mathbb{R}$
4. $\cos(t) \leqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ pour $t \in \mathbb{R}$

Résultat attendu :

1. L'ensemble solution est $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{6}\right]$.
2. L'ensemble solution est $\left[-\pi, \dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{6}, \pi\right]$.
3. L'ensemble solution est $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$ ou $\mathbb{R} \setminus \left(\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right[\right)$.
4. L'ensemble solution est $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right]$ ou $\mathbb{R} \setminus \left(\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right[\right)$.

Exercice 3 (★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les $t \in [-\pi, \pi]$ tels que $\sin(nt) = 0$.

Résultat attendu : L'ensemble des solutions est $\left\{\dfrac{k\pi}{n} \middle| k \in [\![-n, n]\!]\right\}$.

Exercice 4 (★★). Résoudre les équations suivantes :

1. $\cos^2(\theta) = \dfrac{1}{2}$, pour $\theta \in \mathbb{R}$.
2. $\cos(2x) = \sin x$, pour $x \in \mathbb{R}$.
3. $\sin(t) = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$, pour $t \neq \pi + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Résultat attendu :

1. L'ensemble des solutions est $\left\{\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. L'ensemble des solutions est $\left\{\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.
3. L'ensemble des solutions est $\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{2k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 5 (★★). Soit $t \in [0, \pi]$. En utilisant les formules trigonométriques pour se ramener à un produit, déterminer le signe de $\sin(4t) + \sin(2t)$.

Résultat attendu : L'expression est positive sur $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2\pi}{3}\right]$ et négative sur $\left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{2\pi}{3}, \pi\right]$.

Exercice 6 (★★). Soit $t \in [0, \pi]$. En utilisant les formules trigonométriques pour se ramener à un produit, déterminer le signe de $\cos(3t) + \cos(t)$.

Résultat attendu : L'expression est positive sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$ et négative sur $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right]$.