ECS1 # Exercices: Variables aléatoires à densité

Exercice 1. On considère une variable aléatoire continue X de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Quelle est sa médiane (la valeur de x telle que $F_X(x) = \frac{1}{2}$) ?
2. On suppose que la durée d'une conversation téléphonique en minutes suit une loi exponentielle d'espérance 10.
   (a) Vous arrivez à une cabine dans laquelle quelqu'un vient d'entrer ; avec quelle probabilité devrez-vous attendre plus de 10 min ?
   (b) Vous êtes arrivés depuis 15 min. Quelle est la probabilité que vous attendiez (en tout) plus de 25 min ?

Exercice 2. Soit $\alpha > 2$. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha-1}{x^\alpha} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité d'une variable X.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X.
3. Calculer l'espérance de X.

Exercice 3. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{e^x}{e^x + e^{-x}}$. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable à densité Z dont on donnera une densité.

Exercice 4. Soit Y une variable à densité suivant une loi uniforme sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Montrer que $X = \tan(Y)$ est une variable à densité dont on étudiera l'espérance.

Exercice 5.

1. Soit $\lambda > 0$, Z une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre λ et F_Z sa fonction de répartition. On admet que $Y = F_Z(Z)$ est une variable aléatoire à densité, déterminer sa loi.
2. Soit X une variable aléatoire réelle dont la fonction de répartition F_X est une bijection continue strictement croissante et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0, 1]$. On admet que $Y = F_X(X)$ est une variable aléatoire à densité, déterminer sa loi.

Exercice 6. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(t) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\dfrac{t^2}{2}\right) & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire T à densité.
   (b) Déterminer une densité f de T.
2. On pose pour tout réel A strictement positif $I(A) = \displaystyle\int_0^A t^2 e^{-t^2/2} dt$. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
   (a) Établir la relation :
   $$I(A) = -Ae^{-A^2/2} + \sqrt{2\pi}\left(\Phi(A) - \frac{1}{2}\right).$$
   (b) En déduire la limite de $I(A)$ en $+\infty$.
   (c) Calculer l'espérance de T

Exercice 7. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$J_n = \int_0^{2\pi} x^n \cos(x)dx, \quad I_n = \int_0^{2\pi} x^n \sin(x)dx.$$

(a) Justifier l'existence de I_n et de J_n.

(b) Montrer que $I_{n+1} = (n+1)J_n - (2\pi)^{n+1}$ et $J_{n+1} = -(n+1)I_n$, pour tout n.

(c) Calculer I_n et J_n pour n égal à 0, 1, 2 et 3.

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{2\pi^2}(1-\cos(x))$ sur $[0, 2\pi]$ et nulle ailleurs.

(a) Montrer que f est une densité d'une variable X.

(b) Déterminer la fonction de répartition de X.

(c) Déterminer $E(X)$ si elle existe.

(d) Calculer les probabilités suivantes à l'aide de F : $P\left(X > \frac{\pi}{2}\right)$, $P\left(|X-\pi| \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, $P_{[X \leqslant 3\frac{\pi}{2}]}\left(X \geqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

Exercice 8. Soit p un réel de $]0,1[$ et $q = 1-p$. Soit λ et μ deux réels strictement positifs. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} q\lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ p\mu e^{\mu x} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, dont f est une densité. Calculer l'espérance $E(X)$.
3. (a) Déterminer les valeurs de p, λ et μ telles que X vérifie : pour tout $x \geqslant 0$,

$$P(X > x) = P(X < -x).$$

(b) On pose alors $Y = |X|$. Déterminer la loi de Y.

(c) A-t-on, pour tout réel s et pour tout réel t tel que $t \geqslant s$,

$$P_{[Y>s]}(Y > t) = P(Y > t-s)?$$

4. Déterminer la fonction de répartition F de X, puis son inverse F^{-1}.

Exercice 9. (Difficile)

1. Soit Z une variable aléatoire réelle à valeurs dans $]0,1[$, possédant une densité g continue sur $]0,1[$. Montrer que Z possède une espérance. On suppose que pour tout $x \in]0,1[$, $g(1-x) = g(x)$. Quelle est, dans ce cas, l'espérance de Z ?
2. (a) Montrer que la fonction $x \to \sin(x)$ réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$. On note φ sa bijection réciproque. Montrer que la fonction φ est dérivable sur $]-1,1[$ et calculer sa dérivée.

(b) Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$. Montrer que cette intégrale converge et la calculer en utilisant un changement de variables affine.

3. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une densité de probabilité. Soit X une variable aléatoire réelle admettant f pour densité. Déterminer $E(X)$ en utilisant la première question. Retrouver ce résultat en utilisant la définition de l'espérance et le changement de variable $x = (\sin(\theta))^2$.