Exercices: Variables aléatoires discrètes

Exercice 1. Soit $c > 0$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par :$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X = n) = \frac{c}{n!}.$$

1. Calculer c.
2. Calculer $E(X)$ et $E(X(X-1))$. En déduire $V(X)$.

Exercice 2 (Loi géométrique)**.** Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, où $p \in]0,1[$ et soit $Y = \left\lfloor \frac{X+1}{2} \right\rfloor$. Montrer que Y suit une loi géométrique dont on déterminera le paramètre.

Exercice 3 (Loi de Poisson)**.** Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, où $\lambda > 0$. On pose $Y = (-1)^X$.

1. Déterminer $Y(\Omega)$ et montrer que $E(Y) = e^{-2\lambda}$.
2. En déduire la loi de Y.

Exercice 4. Au Casino, un joueur joue à un jeu d'argent. S'il dépense n euros (qui sont donc perdus) pour jouer à une partie, il gagne $2n$ euros avec probabilité $\frac{1}{2}$, et ne gagne rien sinon. Un joueur fortuné joue selon le protocole suivant :

— il mise initialement 1 euro ;
— s'il gagne, il arrête de jouer et empoche le double de sa mise.
— s'il perd, il double sa mise et rejoue.

1. On suppose la fortune du joueur infinie. Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement. Déterminer l'espérance de gain du joueur.
2. On suppose toujours la fortune du joueur infinie. Que se passe-t-il si au lieu de doubler, il décide de tripler sa mise lorsqu'il rejoue ?
3. Le joueur n'est en fait pas si fortuné qu'il le prétend : il ne possède que $2^n - 1$ euros ce qui l'autorise à ne pouvoir jouer que n parties. Que devient son espérance de gain ?

Exercice 5 (Loi binomiale et loi de Poisson)**.** On considère une pièce pipée, telle que la probabilité d'obtenir « Pile » à un lancer est $p \in]0,1[$.

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On jette n fois de suite la pièce, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de « Pile » obtenus. Quelle est la loi de X ? Déterminer son espérance et sa variance.
2. On suppose maintenant que le nombre de lancers effectués avec la pièce est une variable aléatoire N suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Quelle est alors la loi de X ? Déterminer son espérance et sa variance.

Exercice 6 (Loi de Pascal)**.** On lance une infinité de fois une pièce pipée, qui renvoie pile avec probabilité $p \in]0,1[$. Soit X la variable aléatoire qui vaut le temps d'attente du r-ème pile ($r \geqslant 2$) s'il existe, et qui vaut 0 sinon. On pose $q = 1 - p$.

1. Montrer que $X(\Omega) = \{0\} \cup [\![r, +\infty[\![$.
2. Montrer que pour tout $k \in [\![r, +\infty[\![$, $P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} q^{k-r} p^r$.
3. Dans le cas où $r = 2$, montrer que X admet une espérance qui vaut $E(X) = \frac{r}{p}$.

Exercice 7 (Loi binomiale négative)**.** Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre d'échecs précédant le r-ème succès dans un processus de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$, et qui vaut 0 s'il n'y a pas de r-ième succès ($r \geqslant 2$). On pose $q = 1 - p$.

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \binom{r+k-1}{k} q^k p^r$.
3. Dans le cas où $r = 2$, montrer que X admet une espérance qui vaut $E(X) = \frac{rq}{p}$.

Exercice 8. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On appelle fonction génératrice des moments de X l'application définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que e^{tX} admet une espérance par

$$M_X(t) = E(e^{tX}).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition E de M_X, et calculer $M_X(t)$ pour tout $t \in E$.
2. Montrer que M_X est dérivable en 0 et qu'on a $E(X) = M'_X(0)$.

Exercice 9. Soit u une suite à valeurs dans $]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que le produit :

$$q_n = \prod_{k=1}^{n}(1-u_k),$$

est convergent lorsque la suite q converge vers un réel $L > 0$.

1. (a) Montrer que si le produit q converge, alors $\lim u_k = 0$.
   (b) En déduire que le produit q converge si et seulement si la série de terme général u_k converge.
2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $P(X \geqslant n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle taux de panne associé la suite réelle définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = P_{[X \geqslant n]}(X = n).$$

   (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $P(X \geqslant n+1) = (1-x_n)P(X \geqslant n)$.
   (b) En déduire l'expression de $p_n = P(X \geqslant n)$ en fonction des x_k.
   (c) Déterminer les lois de variables à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ ayant un taux de panne constant.
   (d) Montrer qu'une suite réelle x est un taux de panne si et seulement si $0 \leqslant x_k < 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et la série de terme général x_k diverge.