Exercices: Variables aléatoires sur un espace fini

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire finie de fonction de répartition :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 1/3 & \text{si } -1 \leqslant x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leqslant x \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de X.
2. Soit $T = aX + b$ (a et b deux réels fixés, $a > 0$). Déterminer la fonction de répartition de T.

Exercice 2. Une urne contient deux boules blanches et quatre boules noires. On tire les boules une à une et sans remise jusqu'à ce qu'il ne reste dans l'urne que des boules de la même couleur. Soit X la variable aléatoire associée au nombre de tirages nécessaires. Déterminer la loi de X.

Exercice 3. On lance simultanément 2 dés, et on note X le plus grand des numéros. Déterminer la loi de X.

Exercice 4. L'oral d'un concours comporte 100 sujets. Chaque candidat en tire au sort deux et choisit celui qu'il souhaite traiter. Un candidat arrive en ayant révisé 60 des 100 sujets.

1. Quelle est la probabilité pour que le candidat ait révisé :
   (a) Les deux sujets ?
   (b) Exactement un ?
   (c) Aucun ?
2. Définir une variable aléatoire associée à ce problème dont on déterminera la loi de probabilité et l'espérance.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $[\![0, n]\!]$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on suppose que $P(X = k) = \ln(a^k)$, où a est un réel strictement positif.

1. Déterminer a pour que X soit une variable aléatoire.
2. Calculer $E(X)$.
3. Calculer $V(X)$.

Exercice 6. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![-3, 3]\!])$ et $Y = X^2$. Déterminer la loi de Y ainsi que son espérance et sa variance.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $2n$ jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à $2n$. Soit $k \in [\![1, 2n]\!]$. On tire au hasard un jeton dans l'urne. Soit X la variable aléatoire associée au numéro obtenu. Si ce numéro est supérieur ou égal à k alors on note le numéro, sinon on remet le jeton dans l'urne et on retire un jeton dont on note alors le numéro. Soit Y la variable aléatoire associée au numéro noté.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.
3. Pour quelle valeur de k l'espérance de Y est-elle maximale ?

Exercice 8. Une entreprise recrute un cadre, $n \in \mathbb{N}^*$ candidats se présentent. Chacun d'eux passe un test avec une probabilité de réussite p ($0 < p < 1$) identique pour chacun. Le premier qui réussit ce test est engagé. On note X la variable aléatoire associée au numéro du candidat engagé, ou X prend la valeur $n + 1$ si aucun des candidats ne réussit le test. On pose $q = 1 - p$.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que pour tout $x \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$.
3. Calculer $E(X)$ en fonction de q.
4. Pour quelles valeurs de p, l'entreprise a-t-elle plus d'une chance sur deux d'engager un candidat ?

Exercice 9 (Loi Hypergéométrique)**.** On tire $n \geqslant 2$ boules sans remise dans une urne contenant $N \geqslant n$ boules avec une proportion $p \in]0,1[$ de blanches, les autres étant noires. On pose $q = 1-p$. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de blanches tirées.

1. Préliminaire : montrer que si a, b et m sont des entiers naturels, on a la relation $\displaystyle\binom{a+b}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{a}{k}\binom{b}{m-k}$.
2. Montrer que $X(\Omega) \subset [\![0,n]\!]$.
3. Montrer que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P(X=k) = \dfrac{\binom{pN}{k}\binom{qN}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.
4. Montrer que $E(X) = np$ et que $V(X) = npq\dfrac{N-n}{N-1}$.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois une pièce de monnaie donnant "pile" avec la probabilité $p \in]0,1[$ et "face" avec la probabilité $q = 1-p$. On appelle k-chaîne une suite de k lancers consécutifs ayant tous donné "pile", cette suite devant être précédée et suivie d'un "face" (à moins qu'elle ne débute ou termine le tirage). Pour tout k de $\{1,\ldots,n\}$, on note Y_k la variable aléatoire égale au nombre total de k-chaînes de "pile" obtenues au cours de ces n lancers, et P_k l'événement "on obtient "pile" au k-ième lancer".
Par exemple, avec $n = 11$, si l'on a obtenu $P_1P_2F_3F_4P_5P_6P_7F_8P_9F_{10}P_{11}$ alors $Y_1 = 2$, $Y_2 = 1$ et $Y_3 = 1$.
Le but de cet exercice est de déterminer, pour tout k de $\{1,\ldots,n\}$, l'espérance de Y_k, notée $E(Y_k)$.

1. Déterminer la loi de Y_n et donner $E(Y_n)$.
2. Montrer que $P(Y_{n-1} = 1) = 2qp^{n-1}$ et donner $E(Y_{n-1})$.
3. Dans cette question, k désigne un élément de $\{1,\ldots,n-2\}$. Pour tout i de $\{1,\ldots,n\}$, on note $X_{i,k}$ la variable aléatoire qui vaut 1 si une k-chaîne de "pile" commence au i-ème lancer et qui vaut 0 sinon.
   (a) Calculer $P(X_{1,k} = 1)$.
   (b) Soit $i \in \{2,\ldots,n-k\}$. Montrer que $P(X_{i,k} = 1) = q^2p^k$.
   (c) Montrer que $P(X_{n-k+1,k} = 1) = qp^k$.
   (d) Exprimer Y_k en fonction des variables $X_{i,k}$ puis déterminer $E(Y_k)$.

Exercice 11. Un pion est déplacé sur un échiquier à quatre cases C_1, C_2, C_3 et C_4. Il se déplace de l'une des cases vers l'une quelconque des 3 autres cases de manière équiprobable, sauf s'il se trouve en C_4, auquel cas il y reste (on peut considérer qu'il se déplace de C_4 en C_4). A l'instant initial, le pion est en C_1.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la case occupée par le pion à l'issue de son k-ième déplacement, avec $X_0 = 1$.

Soit $Y_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \\ d_k \end{pmatrix}$ avec $a_k = P(X_k = 1)$, $b_k = P(X_k = 2)$, $c_k = P(X_k = 3)$, $d_k = P(X_k = 4)$.

1. Calculer a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1} et d_{k+1} en fonction de a_k, b_k, c_k et d_k et en déduire la matrice carrée A telle que $Y_{k+1} = AY_k$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel k, $Y_k = A^kY_0$.
3. En déduire la loi de la variable aléatoire X_2, son espérance et son écart-type.
4. Justifier les relations : pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$d_{k+1} = \frac{2}{3}(d_k - 1) + 1, \quad a_{k+2} = \frac{1}{3}a_{k+1} + \frac{2}{9}a_k.$$
   En déduire la loi de X_k pour tout $k \in \mathbb{N}$.