# Variables aléatoires

**Exercice 1 (★).** Dans une ville, une proportion $p$ de la population est atteinte par un virus contagieux. Si une personne saine est en contact avec une personne contaminée, il y a 2 chances sur 3 qu'elle soit elle-même contaminée. Un représentant de commerce (sain) décide de rendre visite à $n$ habitants de cette ville.

1. Soit $N$ la variable aléatoire égale au nombre de malades qu'il rencontre. Quelle est la loi de $N$ ?
2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On suppose que le représentant a rencontré $k$ malades. Quelle est la probabilité qu'il soit en bonne santé à la fin de sa tournée ?
3. Quelle est la probabilité que le représentant soit en bonne santé à l'issue de sa tournée ?

**Exercice 2 (★).** Un secrétaire effectue $n$ appels téléphoniques vers $n$ personnes. Ces appels sont indépendants les uns des autres et pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est de $p \in ]0, 1[$. On note $q = 1 - p$ et $X$ désigne la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

1. Quelle est la loi de $X$ ?
2. Après ses $n$ recherches, le secrétaire appelle une deuxième fois chacun des $n - k$ correspondants qu'il n'a pas réussi à joindre la première fois. Soit $Y$ la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus dans cette deuxième série d'appels. On note $Z = X + Y$ le nombre de correspondants obtenus.
   (a) Pour $k \in [\![0, n]\!]$ et $\ell \in [\![0, n-k]\!]$, calculer la probabilité conditionnelle $P(Y = \ell | X = k)$.
   (b) (★★) Déterminer la loi de $Z$. On montrera qu'il s'agit d'une loi binomiale, en précisant les paramètres.

**Exercice 3 (★).** Un pion est déplacé sur un échiquier à quatre cases $C_1$, $C_2$, $C_3$ et $C_4$. Il se déplace de l'une des cases vers l'une quelconque des 3 autres cases de manière équiprobable, sauf s'il se trouve en $C_4$, auquel cas il y reste (on peut considérer qu'il se déplace de $C_4$ en $C_4$). A l'instant initial, le pion est en $C_1$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $X_k$ la variable aléatoire égale au numéro de la case occupée par le pion à l'issue de son $k$-ième déplacement, avec $X_0 = 1$.
Soit $Y_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \\ d_k \end{pmatrix}$ avec $a_k = P(X_k = 1)$, $b_k = P(X_k = 2)$, $c_k = P(X_k = 3)$, $d_k = P(X_k = 4)$.

1. Calculer $a_{k+1}$, $b_{k+1}$, $c_{k+1}$ et $d_{k+1}$ en fonction de $a_k$, $b_k$, $c_k$ et $d_k$ et en déduire la matrice carrée $A$ telle que $Y_{k+1} = AY_k$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel $k$, $Y_k = A^k Y_0$.
3. En déduire la loi de la variable aléatoire $X_2$.
4. (★★) Justifier que $\forall k \in \mathbb{N}$, $d_{k+1} = \frac{2}{3}(d_k - 1) + 1$ et $a_{k+2} = \frac{1}{3}a_{k+1} + \frac{2}{9}a_k$.
5. (★★) En déduire la loi de $X_k$.

**Exercice 4 (★).** Une urne contient une boule blanche, une verte et deux rouges. On tire successivement les 4 boules, sans remise, et on note à chaque fois leur couleur.

1. Combien y a-t-il de séquences possibles ? Déterminer la probabilité de ces séquences.
2. Soit $X$ le rang d'apparition de la boule blanche et $Y$ celui de la première boule rouge. Déterminer la loi du couple $(X, Y)$ puis les lois marginales.
3. Calculer $P_{\{X=3\}}(Y = 2)$.

**Exercice 5 (★).** Un sac contient $n$ jetons numérotés de 1 à $n$. On tire successivement et sans remise 2 jetons de ce sac. On note $T_1$ le numéro du premier jeton tiré et $T_2$ le numéro du deuxième jeton tiré.

1. Déterminer la loi de $T_1$.
2. Déterminer la loi du couple $(T_1, T_2)$.
3. En déduire la loi de $T_2$.
4. Les variables aléatoires $T_1$ et $T_2$ sont-elles indépendantes ?

**Exercice 6 (★★).** Une urne contient $N$ boules numérotées de 1 à $N$. On prélève successivement et avec remise $n$ boules de l'urne. Soient $X$ et $Y$ les variables aléatoires égales au plus petit et au plus grand numéro obtenus.

1. Pour $x \in [\![1, N]\!]$, calculer $P(X \geqslant x)$ et en déduire la loi de $X$.
2. Pour $y \in [\![1, N]\!]$, calculer $P(Y \leqslant y)$ et en déduire la loi de $Y$.
3. Pour $(x, y) \in [\![1, N]\!]^2$, calculer $P\left(\{X \geqslant x\} \cap \{Y \leqslant y\}\right)$ et en déduire la loi du couple $(X, Y)$.