Variables aléatoires

Exercice 1 (★). Soit $Y \sim \mathcal{U}([\![-3,3]\!])$, donner la loi de $Z = (-1)^Y$.

Exercice 2 (★). Un pion est déplacé sur un échiquier à quatre cases C_1, C_2, C_3 et C_4. Il se déplace de l'une des cases vers l'une des 3 autres cases de manière équiprobable, sauf s'il se trouve en C_4, auquel cas il y reste (on peut considérer qu'il se déplace de C_4 en C_4). A l'instant initial, le pion est en C_1.
Soit $k \in \mathbb{N}$, on note X_k le numéro de la case occupée par le pion à l'issue du k-ième déplacement, avec $X_0 = 1$.
Soit $Y_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \\ d_k \end{pmatrix}$ avec $a_k = P(X_k = 1)$, $b_k = P(X_k = 2)$, $c_k = P(X_k = 3)$, $d_k = P(X_k = 4)$.

1. Pour tout entier naturel k, donner le système complet d'événements associé à la variable aléatoire X_k.
2. Pour tout entier naturel k, calculer a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1} et d_{k+1} en fonction de a_k, b_k, c_k et d_k. En déduire la matrice A telle que $Y_{k+1} = AY_k$.
3. Justifier que, pour tout entier naturel k, $Y_k = A^k Y_0$.
4. En déduire la loi de la variable aléatoire X_2.
5. (★★) Justifier que $\forall k \in \mathbb{N}$, $d_{k+1} = \frac{2}{3}(d_k - 1) + 1$ et $a_{k+2} = \frac{1}{3}a_{k+1} + \frac{2}{9}a_k$.
6. (★★) En déduire pour tout entier naturel k la loi de X_k.

Exercice 3 (★). Une urne contient 4 boules vertes, 5 boules rouges, 2 boules blanches et 1 boule noire. On tire simultanément 3 boules, en notant X et Y les nombres respectifs de boules vertes et rouges ainsi obtenues. Déterminer la loi conjointe de X et Y.

Exercice 4 (★). Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On y prélève une boule, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec une autre boule de la couleur de la boule tirée. On considère les variables aléatoires X_i valant 1 si on obtient une boule blanche au i-ème tirage, 0 sinon.

1. Donner la loi de X_1.
2. Donner la loi conjointe du couple (X_1, X_2).
3. En déduire la loi de X_2

Exercice 5 (★). Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire successivement et sans remise 2 jetons de ce sac. On note T_1 le numéro du premier jeton tiré et T_2 le numéro du deuxième jeton tiré.

1. Déterminer la loi de T_1.
2. Déterminer la loi du couple (T_1, T_2).
3. En déduire la loi de T_2.
4. Les variables aléatoires T_1 et T_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 6 (★). Une urne contient une boule blanche, une verte et deux rouges. On tire successivement les 4 boules, sans remise, et on note à chaque fois leur couleur.

1. Combien y a-t-il de séquences possibles ? Déterminer la probabilité de ces séquences.
2. Soit X le rang d'apparition de la boule blanche et Y celui de la première boule rouge. Déterminer la loi du couple (X, Y) puis les lois marginales.
3. Calculer $P_{\{X=3\}}(Y = 2)$.

Exercice 7 (★★). Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On prélève successivement et avec remise n boules de l'urne. Soient X et Y les variables aléatoires égales au plus petit et au plus grand numéro obtenus.

1. Pour $x \in [\![1, N]\!]$, calculer $P(X \geqslant x)$ et en déduire la loi de X.
2. Pour $y \in [\![1, N]\!]$, calculer $P(Y \leqslant y)$ et en déduire la loi de Y.
3. (★★★) Pour $(x, y) \in [\![1, N]\!]^2$, calculer $P(\{X \geqslant x\} \cap \{Y \leqslant y\})$ et en déduire la loi du couple (X, Y).

Exercice 8 (★). On lance 3 fois un dé équilibré. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de multiples de 3, déterminer la loi de X.

Exercice 9 (★)**.** Dans une ville, une proportion p de la population est atteinte par un virus contagieux. Si une personne saine est en contact avec une personne contaminée, il y a 2 chances sur 3 qu'elle soit elle-même contaminée. Un représentant de commerce (sain) décide de rendre visite à n habitants de cette ville.

1. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de malades qu'il rencontre. Quelle est la loi de N ?
2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On suppose que le représentant a rencontré k malades. Quelle est la probabilité qu'il soit en bonne santé à la fin de sa tournée ?
3. En déduire la probabilité que le représentant soit en bonne santé à l'issue de sa tournée.

Exercice 10 (★)**.** Un secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n personnes. Ces appels sont indépendants les uns des autres et pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est de $p \in]0, 1[$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Après ses n recherches, le secrétaire appelle une deuxième fois chacun des $n - k$ correspondants qu'il n'a pas réussi à joindre la première fois. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus dans cette deuxième série d'appels. On note $Z = X + Y$ le nombre de correspondants obtenus.
   (a) Pour $k \in [\![0, n]\!]$ et $\ell \in [\![0, n - k]\!]$, calculer la probabilité conditionnelle $P(Y = \ell | X = k)$.
   (b) Déterminer $Z(\Omega)$ et montrer que $\forall j \in Z(\Omega)$, $P(Z = j) = \sum_{k=0}^{j} \binom{n}{k}\binom{n-k}{j-k} p^j (1 - p)^{2n-j-k}$.
   (c) Soit $j \in Z(\Omega)$ et $k \in [\![0, j]\!]$. Montrer que $\binom{n}{k}\binom{n-k}{j-k} = \binom{n}{j}\binom{j}{k}$.
   (d) Déduire des questions précédentes la loi de Z.
3. (a) Si l'on considère isolément une des n personnes appelées, quelle est la probabilité qu'elle ait répondu à l'une des deux vagues d'appels ?
   (b) Retrouver la loi de Z en utilisant ce résultat.

Exercice 11 (Type DS)**.** On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On lance n fois une pièce équilibrée, les lancers étant supposés indépendants. On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun « pile » pendant ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier « pile ».

1. (a) Déterminer la loi de Z. *Indication : introduire des événements bien choisis…*
   (b) Vérifier que les valeurs de probabilités obtenues en question précédente se somment à 1.

   Dans la suite, on dispose de $n \in \mathbb{N}^*$ urnes U_1, …, U_n. Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, l'urne U_k contient k boules blanches et $n - k$ boules noires. On effectue des tirages d'une boule avec remise, de la façon suivante :
   — si après les lancers de la pièce décrits dans la première question, la variable Z prend la valeur k (avec $k \geqslant 1$), alors on tire une par une et avec remise k boules dans l'urne U_k. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue de ces tirages.
   — si la variable Z a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et X prend la valeur 0.
2. Déterminer $X(\Omega)$.
3. (a) Déterminer, en distinguant les cas $i = 0$ et $1 \leqslant i \leqslant n$, la probabilité $P_{\{Z=0\}}(X = i)$.
   (b) Déterminer, en distinguant les cas $i = n$ et $0 \leqslant i \leqslant n - 1$, la probabilité $P_{\{Z=n\}}(X = i)$.
   (c) Soit $k \in [\![1, n - 1]\!]$. Déterminer, en distinguant les cas $0 \leqslant i \leqslant k$ et $k < i \leqslant n$, la probabilité $P_{\{Z=k\}}(X = i)$.
4. (a) Montrer que $P(X = 0) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \frac{1}{2^n}$.
   (b) Montrer que $P(X = n) = \frac{1}{2^n}$.
   (c) Soit $i \in [\![1, n - 1]\!]$. Montrer que $P(X = i) = \sum_{k=i}^{n-1} \frac{1}{2^k} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}$.
5. Vérifier, avec les expressions trouvées à la question 4, que $\sum_{i=0}^{n} P(X = i) = 1$.