

Exercice 1 (★). Un pion est déplacé sur un échiquier à quatre cases C_1, C_2, C_3 et C_4 . Il se déplace de l'une des cases vers l'une des 3 autres cases de manière équiprobable, sauf s'il se trouve en C_4 , auquel cas il y reste (on peut considérer qu'il se déplace de C_4 en C_4). A l'instant initial, le pion est en C_1 .

Soit $k \in \mathbb{N}$, on note X_k le numéro de la case occupée par le pion à l'issue du k -ième déplacement, avec $X_0 = 1$.

Soit $Y_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \\ d_k \end{pmatrix}$ avec $a_k = P(X_k = 1)$, $b_k = P(X_k = 2)$, $c_k = P(X_k = 3)$, $d_k = P(X_k = 4)$.

1. Pour tout entier naturel k , donner le système complet d'événements associé à la variable aléatoire X_k .
2. Pour tout entier naturel k , calculer a_{k+1} , b_{k+1} , c_{k+1} et d_{k+1} en fonction de a_k , b_k , c_k et d_k . En déduire la matrice A telle que $Y_{k+1} = AY_k$.
3. Justifier que, pour tout entier naturel k , $Y_k = A^k Y_0$.
4. En déduire la loi de la variable aléatoire X_2 .
5. (★★) Justifier que $\forall k \in \mathbb{N}$, $d_{k+1} = \frac{2}{3}(d_k - 1) + 1$ et $a_{k+2} = \frac{1}{3}a_{k+1} + \frac{2}{9}a_k$.
6. (★★) En déduire pour tout entier naturel k la loi de X_k .

Exercice 2 (★). Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n . On tire successivement et sans remise 2 jetons de ce sac. On note T_1 le numéro du premier jeton tiré et T_2 le numéro du deuxième jeton tiré.

1. Déterminer la loi de T_1 .
2. Déterminer la loi du couple (T_1, T_2) .
3. En déduire la loi de T_2 .
4. Les variables aléatoires T_1 et T_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 (★). Une urne contient une boule blanche, une verte et deux rouges. On tire successivement les 4 boules, sans remise, et on note à chaque fois leur couleur.

1. Combien y a-t-il de séquences possibles ? Déterminer la probabilité de ces séquences.
2. Soit X le rang d'apparition de la boule blanche et Y celui de la première boule rouge. Déterminer la loi du couple (X, Y) puis les lois marginales.
3. Calculer $P_{\{X=3\}}(Y = 2)$.

Exercice 4 (★★). Une urne contient N boules numérotées de 1 à N . On prélève successivement et avec remise n boules de l'urne. Soient X et Y les variables aléatoires égales au plus petit et au plus grand numéro obtenus.

1. Pour $x \in \llbracket 1, N \rrbracket$, calculer $P(X \geq x)$ et en déduire la loi de X .
2. Pour $y \in \llbracket 1, N \rrbracket$, calculer $P(Y \leq y)$ et en déduire la loi de Y .
3. Pour $(x, y) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$, calculer $P(\{X \geq x\} \cap \{Y \leq y\})$ et en déduire la loi du couple (X, Y) .

Exercice 5 (★). Dans une ville, une proportion p de la population est atteinte par un virus contagieux. Si une personne saine est en contact avec une personne contaminée, il y a 2 chances sur 3 qu'elle soit elle-même contaminée. Un représentant de commerce (sain) décide de rendre visite à n habitants de cette ville.

1. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de malades qu'il rencontre. Quelle est la loi de N ?
2. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On suppose que le représentant a rencontré k malades. Quelle est la probabilité qu'il soit en bonne santé à la fin de sa tournée ?
3. En déduire la probabilité que le représentant soit en bonne santé à l'issue de sa tournée.

Exercice 6 (★). Un secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n personnes. Ces appels sont indépendants les uns des autres et pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est de $p \in]0, 1[$. On note $q = 1 - p$ et X désigne la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Après ses n recherches, le secrétaire appelle une deuxième fois chacun des $n - k$ correspondants qu'il n'a pas réussi à joindre la première fois. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus dans cette deuxième série d'appels. On note $Z = X + Y$ le nombre de correspondants obtenus.
 - (a) Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $\ell \in \llbracket 0, n - k \rrbracket$, calculer la probabilité conditionnelle $P(Y = \ell | X = k)$.
 - (b) (★★) Déterminer la loi de Z . On montrera qu'il s'agit d'une loi binomiale, en exprimant ses paramètres en fonction de n et p .

Exercice 7 (Type DS). On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On lance n fois une pièce équilibrée, les lancers étant supposés indépendants. On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun « pile » pendant ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier « pile ».

1. (a) Déterminer la loi de Z . *Indication : introduire des événements bien choisis...*

(b) Vérifier que les valeurs de probabilités obtenues en question précédente se somment à 1.

Dans la suite, on dispose de $n \in \mathbb{N}^*$ urnes U_1, \dots, U_n . Pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, l'urne U_k contient k boules blanches et $n - k$ boules noires. On effectue des tirages d'une boule avec remise, de la façon suivante :

— si après les lancers de la pièce décrits dans la première question, la variable Z prend la valeur k (avec $k \geq 1$), alors on tire une par une et avec remise k boules dans l'urne U_k . On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue de ces tirages.

— si la variable Z a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et X prend la valeur 0.

2. Déterminer $X(\Omega)$.

3. (a) Déterminer, en distinguant les cas $i = 0$ et $1 \leq i \leq n$, la probabilité $P_{\{Z=0\}}(X = i)$.

(b) Déterminer, en distinguant les cas $i = n$ et $0 \leq i \leq n - 1$, la probabilité $P_{\{Z=n\}}(X = i)$.

(c) Soit $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$. Déterminer, en distinguant les cas $0 \leq i \leq k$ et $k < i \leq n$, la probabilité $P_{\{Z=k\}}(X = i)$.

4. (a) Montrer que $P(X = 0) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \frac{1}{2^n}$.

(b) Montrer que $P(X = n) = \frac{1}{2^n}$.

(c) Soit $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$. Montrer que $P(X = i) = \sum_{k=i}^{n-1} \frac{1}{2^k} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}$.

5. Vérifier, avec les expressions trouvées à la question 4, que $\sum_{i=0}^n P(X = i) = 1$.