Variables aléatoires

Exercice 1 (★). Un pion est déplacé sur un échiquier à quatre cases C_1, C_2, C_3 et C_4. Il se déplace de l'une des cases vers l'une des 3 autres cases de manière équiprobable, sauf s'il se trouve en C_4, auquel cas il y reste (on peut considérer qu'il se déplace de C_4 en C_4). A l'instant initial, le pion est en C_1.
Soit $k \in \mathbb{N}$, on note X_k le numéro de la case occupée par le pion à l'issue du k-ième déplacement, avec $X_0 = 1$.
Soit $Y_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \\ d_k \end{pmatrix}$ avec $a_k = P(X_k = 1)$, $b_k = P(X_k = 2)$, $c_k = P(X_k = 3)$, $d_k = P(X_k = 4)$.

1. Pour tout entier naturel k, donner le système complet d'événements associé à la variable aléatoire X_k.
2. Pour tout entier naturel k, calculer a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1} et d_{k+1} en fonction de a_k, b_k, c_k et d_k. En déduire la matrice A telle que $Y_{k+1} = AY_k$.
3. Justifier que, pour tout entier naturel k, $Y_k = A^k Y_0$.
4. En déduire la loi de la variable aléatoire X_2.
5. (★★) Justifier que $\forall k \in \mathbb{N}$, $d_{k+1} = \frac{2}{3}(d_k - 1) + 1$ et $a_{k+2} = \frac{1}{3}a_{k+1} + \frac{2}{9}a_k$.
6. (★★) En déduire pour tout entier naturel k la loi de X_k.

Résultat attendu :

1. C'est $(\{X_k = 1\}, \{X_k = 2\}, \{X_k = 3\}, \{X_k = 4\})$.
2. $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
3. On le montre par récurrence sur k.
4. $X_2(\Omega) = [\![1, 4]\!]$, $P(X_2 = 1) = \frac{2}{9}$, $P(X_2 = 2) = P(X_2 = 3) = \frac{1}{9}$, $P(X_2 = 4) = \frac{5}{9}$.
5. Se déduit de la question 1 et du fait que les probabilités se somment à 1.
6. $X_k(\Omega) = [\![1, 4]\!]$, $P(X_k = 1) = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^k + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k$ (suite récurrente linéaire double), $P(X_k = 4) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k$ (suite arithmético-géométrique), puis $P(X_k = 2) = P(X_k = 3) = \left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k$ (les probabilités se somment à 1).

Exercice 2 (★). Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire successivement et sans remise 2 jetons de ce sac. On note T_1 le numéro du premier jeton tiré et T_2 le numéro du deuxième jeton tiré.

1. Déterminer la loi de T_1.
2. Déterminer la loi du couple (T_1, T_2).
3. En déduire la loi de T_2.
4. Les variables aléatoires T_1 et T_2 sont-elles indépendantes ?

Résultat attendu :

1. $T_1 \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!])$.
2. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Si $i = j$, $P(T_1 = i, T_2 = i) = 0$. Sinon, $P(T_1 = i, T_2 = j) = \frac{1}{n(n-1)}$.
3. La question précédente permet de montrer que $T_2 \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!])$.
4. Non, on le montre à l'aide d'un contre-exemple.

Exercice 3 (★). Une urne contient une boule blanche, une verte et deux rouges. On tire successivement les 4 boules, sans remise, et on note à chaque fois leur couleur.

1. Combien y a-t-il de séquences possibles ? Déterminer la probabilité de ces séquences.
2. Soit X le rang d'apparition de la boule blanche et Y celui de la première boule rouge. Déterminer la loi du couple (X, Y) puis les lois marginales.
3. Calculer $P_{\{X=3\}}(Y = 2)$.

Résultat attendu :

1. Il y a 12 séquences équiprobables, de probabilité $\frac{1}{12}$ chacune.
2. On trouve comme probabilités pour la loi du couple :

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$
$Y = 1$	0	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$
$Y = 2$	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
$Y = 3$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	0

.

On en déduit $X \sim \mathcal{U}([\![1, 4]\!])$ et $P(Y = 1) = \frac{1}{2}$, $P(Y = 2) = \frac{1}{3}$, $P(Y = 3) = \frac{1}{6}$.

3. $P_{\{X=3\}}(Y = 2) = \frac{1}{3}$.

Exercice 4 (★★). Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On prélève successivement et avec remise n boules de l'urne. Soient X et Y les variables aléatoires égales au plus petit et au plus grand numéro obtenus.

1. Pour $x \in [\![1, N]\!]$, calculer $P(X \geqslant x)$ et en déduire la loi de X.
2. Pour $y \in [\![1, N]\!]$, calculer $P(Y \leqslant y)$ et en déduire la loi de Y.
3. Pour $(x, y) \in [\![1, N]\!]^2$, calculer $P(\{X \geqslant x\} \cap \{Y \leqslant y\})$ et en déduire la loi du couple (X, Y).

Résultat attendu :

1. $P(X \geqslant x) = \left(\frac{N-x+1}{N}\right)^n$, donc $\forall x \in [\![1, N]\!]$, $P(X = x) = \left(\frac{N-x+1}{N}\right)^n - \left(\frac{N-x}{N}\right)^n$.
2. $P(Y \leqslant y) = \left(\frac{y}{N}\right)^n$, donc $\forall y \in [\![1, N]\!]$, $P(Y = y) = \left(\frac{y}{N}\right)^n - \left(\frac{y-1}{N}\right)^n$.
3. $P(\{X \geqslant x\} \cap \{Y \leqslant y\}) = \left(\frac{y-x+1}{N}\right)^n$. Donc $\forall (x, y) \in [\![1, N]\!]^2$, $P(X = x, Y = y) = \left(\frac{y-x+1}{N}\right)^n - 2\left(\frac{y-x}{N}\right)^n$.

Exercice 5 (★). Dans une ville, une proportion p de la population est atteinte par un virus contagieux. Si une personne saine est en contact avec une personne contaminée, il y a 2 chances sur 3 qu'elle soit elle-même contaminée. Un représentant de commerce (sain) décide de rendre visite à n habitants de cette ville.

1. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de malades qu'il rencontre. Quelle est la loi de N ?
2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On suppose que le représentant a rencontré k malades. Quelle est la probabilité qu'il soit en bonne santé à la fin de sa tournée ?
3. En déduire la probabilité que le représentant soit en bonne santé à l'issue de sa tournée.

Résultat attendu :

1. $N \sim \mathcal{B}(n, p)$.
2. La probabilité recherchée vaut $\frac{1}{3^k}$.
3. La probabilité recherchée vaut $\left(1 - \frac{2p}{3}\right)^n$, on l'obtient avec la formule des probabilités totales.

Exercice 6 (★). Un secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n personnes. Ces appels sont indépendants les uns des autres et pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est de $p \in]0,1[$. On note $q = 1 - p$ et X désigne la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Après ses n recherches, le secrétaire appelle une deuxième fois chacun des $n-k$ correspondants qu'il n'a pas réussi à joindre la première fois. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus dans cette deuxième série d'appels. On note $Z = X + Y$ le nombre de correspondants obtenus.
   (a) Pour $k \in [\![0, n]\!]$ et $\ell \in [\![0, n-k]\!]$, calculer la probabilité conditionnelle $P(Y = \ell | X = k)$.
   (b) (★★) Déterminer la loi de Z. On montrera qu'il s'agit d'une loi binomiale, en exprimant ses paramètres en fonction de n et p.

Résultat attendu :

1. $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.
2. (a) $P(Y = \ell | X = k) = \binom{n-k}{\ell} p^\ell (1-p)^{n-k-\ell}$.
   (b) On montre $Z \sim \mathcal{B}(n, 2p - p^2)$ à l'aide de la formule des probabilités totales.

Exercice 7 (Type DS)**.** On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On lance n fois une pièce équilibrée, les lancers étant supposés indépendants. On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun « pile » pendant ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier « pile ».

1. (a) Déterminer la loi de Z. *Indication : introduire des événements bien choisis...*

   (b) Vérifier que les valeurs de probabilités obtenues en question précédente se somment à 1.

   Dans la suite, on dispose de $n \in \mathbb{N}^*$ urnes $U_1, \ldots, U_n$. Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, l'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. On effectue des tirages d'une boule avec remise, de la façon suivante :

   — si après les lancers de la pièce décrits dans la première question, la variable Z prend la valeur k (avec $k \geqslant 1$), alors on tire une par une et avec remise k boules dans l'urne U_k. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue de ces tirages.

   — si la variable Z a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et X prend la valeur 0.

2. Déterminer $X(\Omega)$.

3. (a) Déterminer, en distinguant les cas $i = 0$ et $1 \leqslant i \leqslant n$, la probabilité $P_{\{Z=0\}}(X = i)$.

   (b) Déterminer, en distinguant les cas $i = n$ et $0 \leqslant i \leqslant n-1$, la probabilité $P_{\{Z=n\}}(X = i)$.

   (c) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Déterminer, en distinguant les cas $0 \leqslant i \leqslant k$ et $k < i \leqslant n$, la probabilité $P_{\{Z=k\}}(X = i)$.

4. (a) Montrer que $P(X = 0) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \frac{1}{2^n}$.

   (b) Montrer que $P(X = n) = \frac{1}{2^n}$.

   (c) Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. Montrer que $P(X = i) = \sum_{k=i}^{n-1} \frac{1}{2^k} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}$.

5. Vérifier, avec les expressions trouvées à la question 4, que $\sum_{i=0}^{n} P(X = i) = 1$.

Résultat attendu :

1. (a) $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$ car soit Z vaut 0 (s'il n'y a aucun pile), soit il vaut une valeur comprise entre 1 et n (le rang du premier pile). Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note F_i l'événement « le $i$ème lancer donne face ». L'indépendance des lancers donne $P(Z = 0) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(F_i) = \frac{1}{2^n}$.

   De même, si $k \in [\![1, n]\!]$, $P(Z = k) = P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} F_i\right) \cap \overline{F_k}\right) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} P(F_i)\right) P(\overline{F_k}) = \frac{1}{2^k}$.

   (b) $\sum_{k \in Z(\Omega)} P(Z = k) = \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{2-1} = 1$.

2. $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$. En effet, si $Z = 0$ alors $X = 0$ et si $Z = k \in [\![1, n]\!]$, X est dans $[\![0, k]\!]$ (renvoie le nombre de boules blanches en k tirages avec remise).

3. (a) Par définition de X, on sait que si $Z = 0$ on a toujours $X = 0$. Donc $P_{\{Z=0\}}(X = 0) = 1$ et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P_{\{Z=0\}}(X = i) = 0$.

   (b) Par définition de X, on sait que si $Z = n$ on tire avec remise n boules dans l'urne U_n, qui contient n boules blanches et 0 boules noires. Donc $P_{\{Z=n\}}(X = n) = 1$ et $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $P_{\{Z=n\}}(X = i) = 0$.

   (c) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Par définition de X, on sait que si $Z = k$ on tire avec remise k boules dans l'urne U_k, qui contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. Donc :

   — si $i \in [\![k+1, n]\!]$, on a $P_{\{Z=k\}}(X = i) = 0$ (on n'effectue pas suffisamment de tirages pour tirer autant de boules blanches).

   — si $i \in [\![0, k]\!]$, réaliser $X = i$ en sachant que $Z = k$ revient à réaliser i succès (« tirer une boule blanche ») dans une succession de k épreuves indépendantes de même probabilité de succès ($\frac{k}{n}$). On reconnaît une loi binomiale $\mathcal{B}(k, \frac{k}{n})$, donc $P_{\{Z=k\}}(X = i) = \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{k-i}$.

4. (a) On applique la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(\{Z = k\})_{k \in [\![0, n]\!]}$:

   $P(X = 0) = \sum_{k=0}^{n} P(Z = k) P_{\{Z=k\}}(X = 0) = \frac{1}{2^n} \times 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \binom{k}{0} \left(\frac{k}{n}\right)^0 \left(1 - \frac{k}{n}\right)^k + \frac{1}{2^n} \times 0$, où on a remplacé les probabilités par les valeurs obtenues aux questions précédentes.

   (b) $P(X = n) = \sum_{k=0}^{n} P(Z = k) P_{\{Z=k\}}(X = n) = \frac{1}{2^n} \times 0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \times 0 + \frac{1}{2^n} \times 1 = \frac{1}{2^n}$, de même.

   (c) $P(X = i) = \sum_{k=0}^{n} P(Z = k) P_{\{Z=k\}}(X = i) = \frac{0}{2^n} + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{0}{2^k} + \sum_{k=i}^{n-1} \frac{1}{2^k} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} + \frac{0}{2^n}$, de même. Cela donne bien $P(X = i) = \sum_{k=i}^{n-1} \frac{1}{2^k} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}$.

5. Par la question 4, $\sum_{i=0}^{n} P(X = i) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \frac{1}{2^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=i}^{n-1} \frac{1}{2^k} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}\right) + \frac{1}{2^n}$.

   Par interversion des sommes, $\sum_{i=0}^{n} P(X = i) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \frac{2}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}$.

   Donc par binôme de Newton, $\sum_{i=0}^{n} P(X = i) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \frac{2}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \left(\left(\frac{k}{n} + \frac{n-k}{n}\right)^k - \left(\frac{n-k}{n}\right)^k\right)$.

   Cela donne $\sum_{i=0}^{n} P(X = i) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \frac{2}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \left(1 - \left(\frac{n-k}{n}\right)^k\right) = \frac{2}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 1$.