

Exercice 1 (★). Soit $Y \sim \mathcal{U}(\llbracket -3, 3 \rrbracket)$, donner la loi de $Z = (-1)^Y$.

Résultat attendu : $Z(\Omega) = \{-1, 1\}$, $P(Z = -1) = \frac{4}{7}$, $P(Z = 1) = \frac{3}{7}$.

Exercice 2 (★). Un pion est déplacé sur un échiquier à quatre cases C_1, C_2, C_3 et C_4 . Il se déplace de l'une des cases vers l'une des 3 autres cases de manière équiprobable, sauf s'il se trouve en C_4 , auquel cas il y reste (on peut considérer qu'il se déplace de C_4 en C_4). A l'instant initial, le pion est en C_1 .

Soit $k \in \mathbb{N}$, on note X_k le numéro de la case occupée par le pion à l'issue du k -ième déplacement, avec $X_0 = 1$.

Soit $Y_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \\ d_k \end{pmatrix}$ avec $a_k = P(X_k = 1)$, $b_k = P(X_k = 2)$, $c_k = P(X_k = 3)$, $d_k = P(X_k = 4)$.

1. Pour tout entier naturel k , donner le système complet d'événements associé à la variable aléatoire X_k .
2. Pour tout entier naturel k , calculer a_{k+1} , b_{k+1} , c_{k+1} et d_{k+1} en fonction de a_k , b_k , c_k et d_k . En déduire la matrice A telle que $Y_{k+1} = AY_k$.
3. Justifier que, pour tout entier naturel k , $Y_k = A^k Y_0$.
4. En déduire la loi de la variable aléatoire X_2 .
5. (★★) Justifier que $\forall k \in \mathbb{N}$, $d_{k+1} = \frac{2}{3}(d_k - 1) + 1$ et $a_{k+2} = \frac{1}{3}a_{k+1} + \frac{2}{9}a_k$.
6. (★★) En déduire pour tout entier naturel k la loi de X_k .

Résultat attendu :

1. C'est $(\{X_k = 1\}, \{X_k = 2\}, \{X_k = 3\}, \{X_k = 4\})$.
2. $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
3. On le montre par récurrence sur k .
4. $X_2(\Omega) = \llbracket 1, 4 \rrbracket$, $P(X_2 = 1) = \frac{2}{9}$, $P(X_2 = 2) = P(X_2 = 3) = \frac{1}{9}$, $P(X_2 = 4) = \frac{5}{9}$.
5. Se déduit de la question 1 et du fait que les probabilités se somment à 1.
6. $X_k(\Omega) = \llbracket 1, 4 \rrbracket$, $P(X_k = 1) = \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^k + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^k$ (suite récurrente linéaire double), $P(X_k = 4) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k$ (suite arithmético-géométrique), puis $P(X_k = 2) = P(X_k = 3) = \left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^k$ (les probabilités se somment à 1).

Exercice 3 (★). Une urne contient 4 boules vertes, 5 boules rouges, 2 boules blanches et 1 boule noire. On tire simultanément 3 boules, en notant X et Y les nombres respectifs de boules vertes et rouges ainsi obtenues. Déterminer la loi conjointe de X et Y .

Résultat attendu : $(X \times Y)(\Omega) \subset \llbracket 0, 3 \rrbracket^2$ et $\forall (i, j) \in (X \times Y)(\Omega)$, $P(X = i, Y = j) = \frac{\binom{4}{i} \binom{5}{j} \binom{3}{3-i-j}}{\binom{12}{3}}$.

Exercice 4 (★). Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On y prélève une boule, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec une autre boule de la couleur de la boule tirée. On considère les variables aléatoires X_i valant 1 si on obtient une boule blanche au i -ième tirage, 0 sinon.

1. Donner la loi de X_1 .
2. Donner la loi conjointe du couple (X_1, X_2) .
3. En déduire la loi de X_2

Résultat attendu :

1. $X_1 \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. $(X_1 \times X_2)(\Omega) \subset \llbracket 0, 1 \rrbracket^2$ et dénombrer les cas donne $P(X_1 = 1, X_2 = 1) = P(X_1 = 0, X_2 = 0) = \frac{1}{3}$, $P(X_1 = 0, X_2 = 1) = P(X_1 = 1, X_2 = 0) = \frac{1}{6}$.
3. $X_2 \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ en sommant les probabilités obtenues à la question précédente.

Exercice 5 (★). Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n . On tire successivement et sans remise 2 jetons de ce sac. On note T_1 le numéro du premier jeton tiré et T_2 le numéro du deuxième jeton tiré.

1. Déterminer la loi de T_1 .
2. Déterminer la loi du couple (T_1, T_2) .
3. En déduire la loi de T_2 .
4. Les variables aléatoires T_1 et T_2 sont-elles indépendantes ?

Résultat attendu :

1. $T_1 \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.
2. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Si $i = j$, $P(T_1 = i, T_2 = i) = 0$. Sinon, $P(T_1 = i, T_2 = j) = \frac{1}{n(n-1)}$.
3. La question précédente permet de montrer que $T_2 \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.
4. Non, on le montre à l'aide d'un contre-exemple.

Exercice 6 (★). Une urne contient une boule blanche, une verte et deux rouges. On tire successivement les 4 boules, sans remise, et on note à chaque fois leur couleur.

1. Combien y a-t-il de séquences possibles ? Déterminer la probabilité de ces séquences.
2. Soit X le rang d'apparition de la boule blanche et Y celui de la première boule rouge. Déterminer la loi du couple (X, Y) puis les lois marginales.
3. Calculer $P_{\{X=3\}}(Y = 2)$.

Résultat attendu :

1. Il y a 12 séquences équiprobables, de probabilité $\frac{1}{12}$ chacune.
2. On trouve comme probabilités pour la loi du couple :

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$
$Y = 1$	0	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$
$Y = 2$	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
$Y = 3$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	0

On en déduit $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, 4 \rrbracket)$ et $P(Y = 1) = \frac{1}{2}$, $P(Y = 2) = \frac{1}{3}$, $P(Y = 3) = \frac{1}{6}$.

3. $P_{\{X=3\}}(Y = 2) = \frac{1}{3}$.

Exercice 7 (★★). Une urne contient N boules numérotées de 1 à N . On prélève successivement et avec remise n boules de l'urne. Soient X et Y les variables aléatoires égales au plus petit et au plus grand numéro obtenus.

1. Pour $x \in \llbracket 1, N \rrbracket$, calculer $P(X \geq x)$ et en déduire la loi de X .
2. Pour $y \in \llbracket 1, N \rrbracket$, calculer $P(Y \leq y)$ et en déduire la loi de Y .
3. (★★★) Pour $(x, y) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$, calculer $P(\{X \geq x\} \cap \{Y \leq y\})$ et en déduire la loi du couple (X, Y) .

Résultat attendu :

1. $P(X \geq x) = \left(\frac{N-x+1}{N}\right)^n$, donc $\forall x \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $P(X = x) = \left(\frac{N-x+1}{N}\right)^n - \left(\frac{N-x}{N}\right)^n$.
2. $P(Y \leq y) = \left(\frac{y}{N}\right)^n$, donc $\forall y \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $P(Y = y) = \left(\frac{y}{N}\right)^n - \left(\frac{y-1}{N}\right)^n$.
3. $P(\{X \geq x\} \cap \{Y \leq y\}) = \left(\frac{y-x+1}{N}\right)^n$ si $y \geq x$, 0 sinon.

On en déduit $\forall (x, y) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$, si $y > x$, $P(X = x, Y = y) = \left(\frac{y-x+1}{N}\right)^n + \left(\frac{y-x-1}{N}\right)^n - 2\left(\frac{y-x}{N}\right)^n$, si $y = x$, $P(X = x, Y = x) = \left(\frac{1}{N}\right)^n$, et les autres cas donnent des probabilités nulles.

Exercice 8 (★). On lance 3 fois un dé équilibré. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de multiples de 3, déterminer la loi de X .

Résultat attendu : $X \sim \mathcal{B}(3, \frac{1}{3})$.

Exercice 9 (★). Dans une ville, une proportion p de la population est atteinte par un virus contagieux. Si une personne saine est en contact avec une personne contaminée, il y a 2 chances sur 3 qu'elle soit elle-même contaminée. Un représentant de commerce (sain) décide de rendre visite à n habitants de cette ville.

1. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de malades qu'il rencontre. Quelle est la loi de N ?
2. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On suppose que le représentant a rencontré k malades. Quelle est la probabilité qu'il soit en bonne santé à la fin de sa tournée ?
3. En déduire la probabilité que le représentant soit en bonne santé à l'issue de sa tournée.

Résultat attendu :

1. $N \sim \mathcal{B}(n, p)$.
2. La probabilité recherchée vaut $\frac{1}{3^k}$.
3. La probabilité recherchée vaut $(1 - \frac{2p}{3})^n$, on l'obtient avec la formule des probabilités totales.

Exercice 10 (★). Un secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n personnes. Ces appels sont indépendants les uns des autres et pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est de $p \in]0, 1[$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Après ses n recherches, le secrétaire appelle une deuxième fois chacun des $n - k$ correspondants qu'il n'a pas réussi à joindre la première fois. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus dans cette deuxième série d'appels. On note $Z = X + Y$ le nombre de correspondants obtenus.
 - (a) Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $\ell \in \llbracket 0, n - k \rrbracket$, calculer la probabilité conditionnelle $P(Y = \ell | X = k)$.
 - (b) Déterminer $Z(\Omega)$ et montrer que $\forall j \in Z(\Omega), P(Z = j) = \sum_{k=0}^j \binom{n}{k} \binom{n-k}{j-k} p^j (1-p)^{2n-j-k}$.
 - (c) Soit $j \in Z(\Omega)$ et $k \in \llbracket 0, j \rrbracket$. Montrer que $\binom{n}{k} \binom{n-k}{j-k} = \binom{n}{j} \binom{j}{k}$.
 - (d) Déduire des questions précédentes la loi de Z .
3. (a) Si l'on considère isolément une des n personnes appelées, quelle est la probabilité qu'elle ait répondu à l'une des deux vagues d'appels ?
 - (b) Retrouver la loi de Z en utilisant ce résultat.

Résultat attendu :

1. $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.
2. (a) $P(Y = \ell | X = k) = \binom{n-k}{\ell} p^\ell (1-p)^{n-k-\ell}$.
 - (b) $Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$, et on obtient l'égalité annoncée en simplifiant une expression donnée par la formule des probabilités totales.
 - (c) On revient aux définitions des coefficients binomiaux.
 - (d) $Z \sim \mathcal{B}(n, 2p - p^2)$.
3. (a) La probabilité cherchée vaut $1 - (1 - p)^2$.
 - (b) $Z \sim \mathcal{B}(n, 1 - (1 - p)^2)$.

Exercice 11 (Type DS). On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On lance n fois une pièce équilibrée, les lancers étant supposés indépendants. On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun « pile » pendant ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier « pile ».

1. (a) Déterminer la loi de Z . *Indication : introduire des événements bien choisis...*
 (b) Vérifier que les valeurs de probabilités obtenues en question précédente se somment à 1.
 Dans la suite, on dispose de $n \in \mathbb{N}^*$ urnes U_1, \dots, U_n . Pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, l'urne U_k contient k boules blanches et $n - k$ boules noires. On effectue des tirages d'une boule avec remise, de la façon suivante :
 — si après les lancers de la pièce décrits dans la première question, la variable Z prend la valeur k (avec $k \geq 1$), alors on tire une par une et avec remise k boules dans l'urne U_k . On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue de ces tirages.
 — si la variable Z a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et X prend la valeur 0.
2. Déterminer $X(\Omega)$.
3. (a) Déterminer, en distinguant les cas $i = 0$ et $1 \leq i \leq n$, la probabilité $P_{\{Z=0\}}(X = i)$.
 (b) Déterminer, en distinguant les cas $i = n$ et $0 \leq i \leq n - 1$, la probabilité $P_{\{Z=n\}}(X = i)$.
 (c) Soit $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$. Déterminer, en distinguant les cas $0 \leq i \leq k$ et $k < i \leq n$, la probabilité $P_{\{Z=k\}}(X = i)$.
4. (a) Montrer que $P(X = 0) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \frac{1}{2^n}$.
 (b) Montrer que $P(X = n) = \frac{1}{2^n}$.
 (c) Soit $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$. Montrer que $P(X = i) = \sum_{k=i}^{n-1} \frac{1}{2^k} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}$.
5. Vérifier, avec les expressions trouvées à la question 4, que $\sum_{i=0}^n P(X = i) = 1$.

Résultat attendu :

1. (a) $Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ car soit Z vaut 0 (s'il n'y a aucun pile), soit il vaut une valeur comprise entre 1 et n (le rang du premier pile). Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note F_i l'événement « le i ème lancer donne face ». L'indépendance des lancers donne $P(Z = 0) = P\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{F_i}\right) = \prod_{i=1}^n P(\overline{F_i}) = \frac{1}{2^n}$.
 De même, si $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(Z = k) = P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{F_i}\right) \cap F_k\right) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} P(\overline{F_i})\right) P(F_k) = \frac{1}{2^k}$.
 (b) $\sum_{k \in Z(\Omega)} P(Z = k) = \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{2 - 1} = 1$.
2. $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$. En effet, si $Z = 0$ alors $X = 0$ et si $Z = k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, X est dans $\llbracket 0, k \rrbracket$ (renvoie le nombre de boules blanches en k tirages avec remise).
3. (a) Par définition de X , on sait que si $Z = 0$ on a toujours $X = 0$. Donc $P_{\{Z=0\}}(X = 0) = 1$ et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P_{\{Z=0\}}(X = i) = 0$.
 (b) Par définition de X , on sait que si $Z = n$ on tire avec remise n boules dans l'urne U_n , qui contient n boules blanches et 0 boules noires. Donc $P_{\{Z=n\}}(X = n) = 1$ et $\forall i \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, $P_{\{Z=n\}}(X = i) = 0$.
 (c) Soit $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$. Par définition de X , on sait que si $Z = k$ on tire avec remise k boules dans l'urne U_k , qui contient k boules blanches et $n - k$ boules noires. Donc :
 — si $i \in \llbracket k + 1, n \rrbracket$, on a $P_{\{Z=k\}}(X = i) = 0$ (on n'effectue pas suffisamment de tirages pour tirer autant de boules blanches).
 — si $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, réaliser $X = i$ en sachant que $Z = k$ revient à réaliser i succès (« tirer une boule blanche ») dans une succession de k épreuves indépendantes de même probabilité de succès $\left(\frac{k}{n}\right)$.
 On reconnaît une loi binomiale $\mathcal{B}\left(k, \frac{k}{n}\right)$, donc $P_{\{Z=k\}}(X = i) = \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{k-i}$.
4. (a) On applique la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(\{Z = k\})_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$:

$$P(X = 0) = \sum_{k=0}^n P(Z = k)P_{\{Z=k\}}(X = 0) = \frac{1}{2^n} \times 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \binom{k}{0} \left(\frac{k}{n}\right)^0 \left(1 - \frac{k}{n}\right)^k + \frac{1}{2^n} \times 0$$
, où on a remplacé les probabilités par les valeurs obtenues aux questions précédentes.
 (b) $P(X = n) = \sum_{k=0}^n P(Z = k)P_{\{Z=k\}}(X = n) = \frac{1}{2^n} \times 0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \times 0 + \frac{1}{2^n} \times 1 = \frac{1}{2^n}$, de même.
 (c) $P(X = i) = \sum_{k=0}^n P(Z = k)P_{\{Z=k\}}(X = i) = \frac{0}{2^n} + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{0}{2^k} + \sum_{k=i}^{n-1} \frac{1}{2^k} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} + \frac{0}{2^n}$, de même. Cela donne bien $P(X = i) = \sum_{k=i}^{n-1} \frac{1}{2^k} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}$.
5. Par la question 4, $\sum_{i=0}^n P(X = i) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \frac{1}{2^n} + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=i}^{n-1} \frac{1}{2^k} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}\right) + \frac{1}{2^n}$.
 Par interversion des sommes, $\sum_{i=0}^n P(X = i) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \frac{2}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}$.
 Donc par binôme de Newton, $\sum_{i=0}^n P(X = i) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \frac{2}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \left(\left(\frac{k}{n} + \frac{n-k}{n}\right)^k - \left(\frac{n-k}{n}\right)^k\right)$.
 Cela donne $\sum_{i=0}^n P(X = i) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \frac{2}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \left(1 - \left(\frac{n-k}{n}\right)^k\right) = \frac{2}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 1$.