Exercices PCSI
É.Bouchet

Variables aléatoires

Exercice 1 (★). Dans une ville, une proportion p de la population est atteinte par un virus contagieux. Si une personne saine est en contact avec une personne contaminée, il y a 2 chances sur 3 qu'elle soit elle-même contaminée. Un représentant de commerce (sain) décide de rendre visite à n habitants de cette ville.

1. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de malades qu'il rencontre. Quelle est la loi de N ?
2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On suppose que le représentant a rencontré k malades. Quelle est la probabilité qu'il soit en bonne santé à la fin de sa tournée ?
3. Quelle est la probabilité que le représentant soit en bonne santé à l'issue de sa tournée ?

Résultat attendu :

1. $N \sim \mathcal{B}(n, p)$.
2. La probabilité recherchée vaut $\frac{1}{3^k}$.
3. La probabilité recherchée vaut $\left(1 - \frac{2p}{3}\right)^n$, on l'obtient avec la formule des probabilités totales.

Exercice 2 (★). Un secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n personnes. Ces appels sont indépendants les uns des autres et pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est de $p \in]0, 1[$. On note $q = 1 - p$ et X désigne la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Après ses n recherches, le secrétaire appelle une deuxième fois chacun des $n - k$ correspondants qu'il n'a pas réussi à joindre la première fois. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus dans cette deuxième série d'appels. On note $Z = X + Y$ le nombre de correspondants obtenus.
   (a) Pour $k \in [\![0, n]\!]$ et $\ell \in [\![0, n - k]\!]$, calculer la probabilité conditionnelle $P(Y = \ell | X = k)$.
   (b) (★★) Déterminer la loi de Z. On montrera qu'il s'agit d'une loi binomiale, en précisant les paramètres.

Résultat attendu :

1. $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.
2. (a) $P(Y = \ell | X = k) = \binom{n-k}{\ell} p^\ell (1 - p)^{n-k-\ell}$.
   (b) On montre $Z \sim \mathcal{B}(n, 2p - p^2)$ à l'aide de la formule des probabilités totales.

Exercice 3 (★). Un pion est déplacé sur un échiquier à quatre cases C_1, C_2, C_3 et C_4. Il se déplace de l'une des cases vers l'une quelconque des 3 autres cases de manière équiprobable, sauf s'il se trouve en C_4, auquel cas il y reste (on peut considérer qu'il se déplace de C_4 en C_4). A l'instant initial, le pion est en C_1.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la case occupée par le pion à l'issue de son k-ième déplacement, avec $X_0 = 1$.
Soit $Y_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \\ d_k \end{pmatrix}$ avec $a_k = P(X_k = 1)$, $b_k = P(X_k = 2)$, $c_k = P(X_k = 3)$, $d_k = P(X_k = 4)$.

1. Calculer a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1} et d_{k+1} en fonction de a_k, b_k, c_k et d_k et en déduire la matrice carrée A telle que $Y_{k+1} = AY_k$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel k, $Y_k = A^k Y_0$.
3. En déduire la loi de la variable aléatoire X_2.
4. (★★) Justifier que $\forall k \in \mathbb{N}$, $d_{k+1} = \frac{2}{3}(d_k - 1) + 1$ et $a_{k+2} = \frac{1}{3} a_{k+1} + \frac{2}{9} a_k$.
5. (★★) En déduire la loi de X_k.

Résultat attendu :

1. $A = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. On le montre par récurrence sur k.
3. $X_2(\Omega) = [\![1, 4]\!]$, $P(X_2 = 1) = \frac{2}{9}$, $P(X_2 = 2) = P(X_2 = 3) = \frac{1}{9}$, $P(X_2 = 4) = \frac{5}{9}$.
4. Se déduit de la question 1 et du fait que les probabilités se somment à 1.
5. $X_k(\Omega) = [\![1, 4]\!]$, $P(X_k = 1) = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^k + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k$ (suite récurrente linéaire double), $P(X_k = 4) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k$ (suite arithmético-géométrique), puis $P(X_k = 2) = P(X_k = 3) = \left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k$ (les probabilités se somment à 1).

Exercice 4 (★). Une urne contient une boule blanche, une verte et deux rouges. On tire successivement les 4 boules, sans remise, et on note à chaque fois leur couleur.

1. Combien y a-t-il de séquences possibles ? Déterminer la probabilité de ces séquences.

2. Soit X le rang d'apparition de la boule blanche et Y celui de la première boule rouge. Déterminer la loi du couple (X, Y) puis les lois marginales.
3. Calculer $P_{\{X=3\}}(Y = 2)$.

Résultat attendu :

1. Il y a 12 séquences équiprobables, de probabilité $\frac{1}{12}$ chacune.
2. On trouve comme probabilités pour la loi du couple :

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$
$Y = 1$	0	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$
$Y = 2$	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
$Y = 3$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	0

.

On en déduit $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, 4 \rrbracket)$ et $P(Y = 1) = \frac{1}{2}$, $P(Y = 2) = \frac{1}{3}$, $P(Y = 3) = \frac{1}{6}$.

3. $P_{\{X=3\}}(Y = 2) = \frac{1}{3}$.

Exercice 5 (★). Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire successivement et sans remise 2 jetons de ce sac. On note T_1 le numéro du premier jeton tiré et T_2 le numéro du deuxième jeton tiré.

1. Déterminer la loi de T_1.
2. Déterminer la loi du couple (T_1, T_2).
3. En déduire la loi de T_2.
4. Les variables aléatoires T_1 et T_2 sont-elles indépendantes ?

Résultat attendu :

1. $T_1 \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.
2. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Si $i = j$, $P(T_1 = i, T_2 = i) = 0$. Sinon, $P(T_1 = i, T_2 = j) = \frac{1}{n(n-1)}$.
3. La question précédente permet de montrer que $T_2 \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.
4. Non, on le montre à l'aide d'un contre-exemple.

Exercice 6 (★★). Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On prélève successivement et avec remise n boules de l'urne. Soient X et Y les variables aléatoires égales au plus petit et au plus grand numéro obtenus.

1. Pour $x \in \llbracket 1, N \rrbracket$, calculer $P(X \geqslant x)$ et en déduire la loi de X.
2. Pour $y \in \llbracket 1, N \rrbracket$, calculer $P(Y \leqslant y)$ et en déduire la loi de Y.
3. Pour $(x, y) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$, calculer $P(\{X \geqslant x\} \cap \{Y \leqslant y\})$ et en déduire la loi du couple (X, Y).

Résultat attendu :

1. $P(X \geqslant x) = (N - x + 1)^n$, donc $\forall x \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $P(X = x) = (N - x + 1)^n - (N - x)^n$.
2. $P(Y \leqslant y) = y^n$, donc $\forall y \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $P(Y = y) = y^n - (y - 1)^n$.
3. $P(\{X \geqslant x\} \cap \{Y \leqslant y\}) = (y-x+1)^n$. Donc $\forall (x, y) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$, $P(X = x, Y = y) = (y-x+1)^n - 2(y-x)^n$.