Exercices: Comparaisons de fonctions

Exercice 1. Étudier les limites des fonctions suivantes (les équivalents et négligeabilités peuvent être nécessaires ou ne pas l'être) :

1. Limites en 1^+ et $+\infty$ de $a(x) = \ln\left(\sqrt{x} - 1\right) - \ln(x - 1)$,
2. Limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de $b(x) = x2^x$,
3. Limite en 8 de $d(x) = \dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x} - 2}$,
4. Limites en 0^+ et $+\infty$ de $f(x) = x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

Exercice 2. Étudier les limites des fonctions suivantes (les équivalents et négligeabilités peuvent être nécessaires ou ne pas l'être) :

1. Limites en 0^+, 0^- et $+\infty$ de $g(x) = \dfrac{x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$,
2. Limites en 0^+ et $+\infty$ de $h(x) = x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$,
3. Limite en $\frac{\pi}{6}$ de $i(x) = \dfrac{2\sin(x) - 1}{1 - 2\cos(2x)}$,
4. Limite en $+\infty$ de $k(x) = \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 3. Donner l'ensemble de définition de $x \to e^{x\sin(x)} - 1$ puis en donner un équivalent (le plus simple possible) au voisinage de 0.

Exercice 4. Donner l'ensemble de définition de $x \to \ln\left(\dfrac{1+x+x^2}{1-2x}\right)$ puis en donner un équivalent (le plus simple possible) au voisinage de 0.

Exercice 5 (Fonction génératrice des cumulants)**.** On note E l'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes finies à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Pour $X \in E$, on note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ avec $0 \leqslant x_1 < x_2 \cdots < x_k$. On pose, $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $P(X = x_i) = p_i > 0$. On définit sur $\mathbb{R}^*$ l'application

$$t \to \Phi_X(t) = \frac{1}{t}\ln\left(\sum_{i=1}^{k} p_i e^{x_i t}\right).$$

1. Soit Y une variable certaine. Déterminer Φ_Y.
2. Soit $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})$. Déterminer Φ_Z. Montrer que Φ_Z peut-être prolongée en une fonction $\widehat{\Phi_Z}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. On suppose $k \geqslant 2$. Déterminer un équivalent en 0 de Φ_X. Montrer que Φ_X peut-être prolongée en une fonction $\widehat{\Phi_X}$. Que vaut $\widehat{\Phi_X}(0)$?