

1 Calcul approché de sommes de séries

1.1 Principe

Il arrive régulièrement d'être capable de montrer la convergence d'une série sans pouvoir calculer sa somme explicitement. Le calcul approché de la somme permet dans ces cas d'obtenir une valeur approximative du résultat.

Soit $\sum u_n$ une série convergente, et ε un réel strictement positif. On va chercher un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que R_n (le reste d'ordre n) vérifie $|R_n| \leq \varepsilon$. La valeur de la somme partielle S_n associée sera alors appelée valeur approchée de la somme à ε près.

1.2 Cas d'une série alternée

Si $\sum u_n$ vérifie le critère des séries alternées, on admet que $|R_n| \leq |u_{n+1}|$. On cherche donc simplement n tel que $|u_{n+1}| \leq \varepsilon$ et on calcule la somme partielle S_n associée.

Exercice 1. On s'intéresse à la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. On voudrait en trouver une valeur approchée avec une précision de $\varepsilon = 10^{-2}$.

1. Déterminer des valeurs de n pour lesquelles $|u_{n+1}| \leq \varepsilon$.
2. Fournir une approximation de la somme.
3. À combien de chiffres après la virgule peut-on se fier ?

2 Calcul approché d'intégrales par la méthode des rectangles

On a vu dans le cours sur les intégrales que si f est une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$, alors les sommes de Riemann S_n et T_n convergent vers $I = \int_a^b f(t)dt$ et

$$|I - S_n| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} M \text{ où } M \text{ est un majorant de } |f'(t)| \text{ sur } [a, b].$$

On rappelle que les deux suites $(S_n)_{n \geq 1}$ et $(T_n)_{n \geq 1}$ sont définies comme suit :

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \quad \text{et} \quad T_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_{k+1}) \quad \text{avec} \quad a_k = a + k \frac{b-a}{n}.$$

Exercice 2. On cherche à calculer une valeur approchée de $I = \int_0^1 \frac{1}{x^4+1} dx$ par la méthode des rectangles, avec une précision de 10^{-2} .

1. Déterminer (si nécessaire en utilisant `plot`) un majorant de la valeur absolue de la dérivée sur l'intervalle considéré.
2. Déterminer un n convenant.
3. Proposer une approximation.